Gh. Galbură

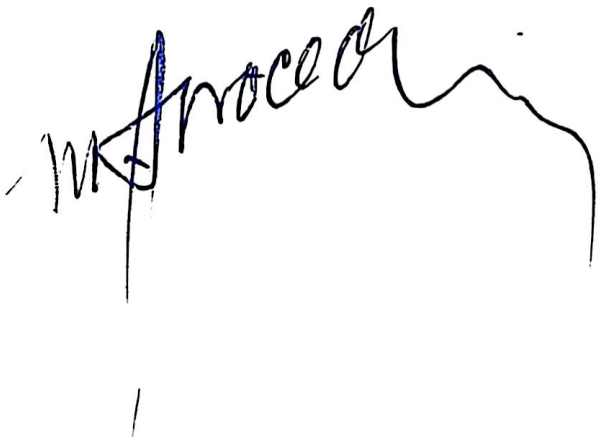
INTRODUCERE ÎN ALGEBRĂ

Societatea de Ştiinţe Matematice din Republica Socialistă România

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

GH. GALBURĂ

INTRODUCERE ÎN ALGEBRĂ



EDITURA TEHNICĂ
București — 1969

Lucrarea prezintă noţiunile de bază şi construcţiile elementare ale algebrei. Sînt expuse teoria determinanţilor şi a sistemelor de ecuaţii liniare, mulţimi, structuri, grupuri, inele, polinoame.

Materialul prezentat cu o maximă claritate, cu demonstraţii directe şi simple, este însoţit de exemple şi exerciţii. Sînt tratate, de asemenea, metodele eficiente de calcul pentru rezolvarea sistemelor liniare şi pentru calculul rădăcinilor reale ale unui polinom.

Cartea se adresează profesorilor de matematică din licee, elevilor din ultimele clase de liceu, studenţilor din primii ani ai facultăţilor, inginerilor precum şi tehnicienilor.

INTRODUCTION TO ALGEBRA

The important progress mathematics realized in the last time impose the necessity and in the some time offer also the possibility of a substantial renewal of the teaching of mathematics, beginning as early as in middle school.

This book presents in an accessible and correct way the basic notions and the elementary constructions of algebra.

The first part of the book deals with : matrix, theory of determinants and of linear equations systems ; permutations.

The second part presents : elements of the theory of sets ; groups ; group-homo--morphisms ; rings and bodies ; vectorial spaces ; sub-spaces ; linear applications.

An important part of the book is reserved for polynomes, polynomial functions and polynomes of several variables.

A great number of concrete examples and exercises helps the reader to get acquinted with new, simple and general notions and with efficient methods of calculus and computation.

The book is destined for teachers of mathematics of second degree schools and can be also utilized by pupils of the last years of second degree schools and by students of the first years of universities.

INTRODUCTION À L'ALGÈBRE

Les progrès importants realisés par les mathématiques dans le dernier temps exigent un renouvellement de l'enseignement des mathématiques ; ces progrès donnent aussi la possibilités de réaliser ce renouvellement, dès les classes de l'école moyenne.

Ce livre présente d'une forme accessible et correcte les notions de base et les constructions elémentaires de l'algèbre.

La première partie présente : les matrices ; la théorie de dèterminants et des systèmes des équations linéaires ; les permutations.

Dans la deuxième partie sont traitées : des éléments de la théorie des ensembles ; groupes et semigroupes ; homomorphismes de groupe ; anneaux et corps ; espaces vectoriels ; sous-espaces ; applications linéaires.

Une partie importante du livre est dédiée aux polynômes, aux fonctions polynômiales et aux polynômes de plusieures variables.

De nombreux exemples concrets et des exercices contribuent à familiariser le lecteur aux notions nouvelles, simples et générales et aux méthodes efficientes de calcul.

Le livre est destiné aux professeurs des mathématiques des lycées et il peut aussi être utile aux élèves des dernières classe de lycée ainsi qu'aux étudiants des premières années des facultés.

EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRA

Die wichtigen von der Mathematik in der letzten Zeit erzielten Fortschritte erfordern eine wesentliche Erneuerung des mathematischen Unterrichts, beginnend von dessen ersten Anfängen in der Mittelschule; dabei bieten diese Fortschritte auch die Möglichkeit, eine solche Erneuerung des mathematischen Unterrichts durchzuführen.

Das vorliegende Werk bietet in einer zugänglichen, korrekten Weise die Grundbegriffe und die grundlegenden Gebilde der modernen Algebra.

Ein erster Teil des Buches erörtert: Matrix und Matrix-Rechnung, Determinantenlehre; Theorie des Systeme linearer Gleichungen; Permutationen.

In einem zweiten Teil werden behandelt: Elemente der Mengenlehre; Gruppen; Halbgruppen; Gruppen-Homomorphismen; Ringe und Körper; Vektoren-Räume; Unter-Räume; lineare Anwendungen.

Ein wesentlicher Teil des Buches befasst sich mit Polynomen, Polynomial-Funktionen und Polynomen mehrerer Veränderlicher.

Zahlreiche konkrete Beispiele und Übungen tragen dazu bei, den Leser mit neuen, einfachen und allgemeinen Begriffen und mit neuen, zweckmässigen Berechnungsverfahren vertraut zu machen.

Das Buch wendet sich an Mathematiklehrer aus Mittelschulen und kann auch von Schülern der letzten Mittelschulklassen und auch von Studierenden der ersten Jahre der Fakultäten verwendet werden.

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ

Значительные достижения последнего времени в области математики выяоили необходимость и в тоже время предоставили возможность серьезного обновления математического обучения, начиная со средней школы.

В книге на доходчивом и правильном уровне излагаются основные понятия и конструкции современной алгебры.

Первая часть книги содержит: матрицы; теорию определителей и систем линейных уравнений; перестановки. Во второй части рассматриваются: элементы теории множеств, полугруппы, группы, групповые гомоморфизмы; кольца и тела, векторные пространства, подпространства, линейные отображения. Значительная часть книги отводится многочленам, полиномиальным функциям и многочленам многих переменных.

Большое число конкретных примеров и задач помогают читателю освоить новые — простые и общие — понятия, а также и эффективные методы расчета.

Книга предназначается преподавателям математики средних школ и может быть использована как учащимися последних классов средних школ, так и студентами первых курсов вузов.

INTRODUCERE

Progresele importante, care s-au făcut în matematică în ultima vreme, impun necesitatea şi, în acelaşi timp, oferă şi posibilitatea unei înnoiri substanţiale a învăţămîntului matematicii, începînd încă din şcoala medie. Se introduc noţiuni noi, simple şi generale, care măresc simţitor puterea raţionamentelor tradiţionale; se impun raţionamente care, intrate de multă vreme în patrimoniul matematicii, s-au simplificat şi acum fac accesibile şi pentru începători rezultate considerate odinioară dificile chiar pentru profesionişti; sfera aplicaţiilor matematicii s-a lărgit considerabil: tineretul nostru va trebui să rezolve sisteme de mai multe ecuaţii liniare, cu multe necunoscute, care se prezintă în economie, în tehnică, fizică şi în celelalte ştiinţe ale naturii.

În cartea de faţă am urmărit să prezint, într-o formă accesibilă şi corectă, o seamă de fapte matematice care acum sînt prevăzute de programele analitice de algebră ale claselor XI—XII din secţiile reale ale liceelor.

După o privire recapitulativă (§ 1) a fost introdusă tematica generală a primei părţi, cu notaţiile corespunzătoare (§ 2). Deoarece matricele constituie un material auxiliar, pentru simplificarea notaţiilor, acestea au fost introduse în § 3, înainte de tratarea sistemelor de trei ecuaţii liniare şi de studiul proprietăţilor determinanţilor.

Cu ajutorul matricelor, am reluat (§ 5), tot în formă recapitulativă, sistemele de trei ecuaţii liniare cu trei necunoscute şi le-am rezolvat, astfel încît să apară în mod natural formulele lui Cramer. La aceasta au servit formulele de rezolvare ale unui sistem omogen de două ecuaţii liniare cu trei necunoscute (§ 4). Determinanţii de ordinul al doilea şi al treilea fiind astfel introduşi, am trecut la studiul proprietăţilor lor (§ 6, § 7). Am avut grijă să prezint determinantul ca o funcţie definită pe mulţimea matricelor pătrate de un anumit ordin şi aşa să-i prezint proprietăţile. Notaţia $\det A$, adoptată după căr-

ţile recente, are rostul să sublinieze faptul că determinantul este o funcţie definită pe mulţimea matricelor pătrate.

Studiul separat al proprietăţilor determinantului de ordinul al doilea a oferit, în mod natural, un loc pentru demonstrarea foarte uşoară a proprietăţii importante, relativă la determinantul produsului a două matrice, precum şi pentru introducerea noţiunii de matrice inversabilă (6.4, pentru calculul inversei unei matrice de ordinul al doilea).

Modul în care a fost introdus determinantul de ordinul al treilea impune dezvoltarea lui după elementele unei coloane; din aceasta rezultă apoi dezvoltarea determinantului de ordinul al treilea şi, în urma unei observaţii, regula lui Sarrus. Aceasta dă posibilitatea demonstrării lesnicioase a proprietăţilor generale ale determinantului pe determinanţi de ordinul al treilea, după ce a fost făcută pe determinanţi de ordinul al doilea.

Cred că şi colegii mei, profesorii, vor fi de acord că pentru a înlesni memorarea proprietăţilor determinanţilor, acestea nu trebuie puse toate pe acelaşi plan, ci mai întîi cele fundamentale, caracteristice (7.3), şi apoi cele care se deduc imediat din acestea.

Studiul permutărilor cere cel mai mare efort (§ 8), dar el vine la timp potrivit, cînd cititorul are suficientă pregătire pentru aceasta. Paragraful respectiv a fost împărţit în două, printr-un lot de exerciţii (8.3), care să impună familiarizarea cititorului cu aceste elemente noi de calcul, cu permutările.

În ceea ce priveşte partea a doua, sînt de făcut următoarele observaţii:

În vederea definirii relaţiei de echivalenţă, precum şi a unor construcţii şi noţiuni din restul cărţii (legi de compunere etc.), a fost nevoie să dau cîteva elemente din teoria mulţimilor (§ 1), introducînd şi noţiunea de produs de mulţimi (1.2).

Înainte de a trece la noţiunea de grup, am introdus noţiunea de semigrup (§ 3), dată fiind importanţa acesteia în matematica actuală, precum şi faptul că mulţimea numerelor naturale, care intervine atît de frecvent în experienţa noastră şi a şcolarilor, este semigrup şi faţă de adunare şi faţă de înmulţire.

La grupuri (§ 4) m-am oprit asupra puterilor unui element dintr-un grup pentru că în şcoală se întîlneşte des funcţia x^n şi am socotit util să demonstrez în cadrul lor natural regulile de calcul cu puteri întregi.

De asemenea am adăugat ceva despre omomorfisme de grup şi despre subgrupuri (4.4—4.7), considerînd că fără acestea noţiunea de grup este săracă şi lipsită de interes. Am pus un număr de exemple concrete de grup (4.8), pentru a familiariza pe cititor cu noţiunile

și pentru a arăta că această noțiune face parte din cunoștințele pe care elevii le capătă în școală.

La inele și corpuri (§ 5), am introdus inele de integritate și corpuri, pentru a sublinia legătura între cele două structuri. Corpul fracțiilor unui inel intervine în școala medie sub forma corpului numerelor raționale și corpul fracțiilor raționale [asupra acestuia din urmă am revenit (8.5) cu descompunerea unei fracții în elemente simple]. La spații vectoriale, am pus și noțiunea de subspațiu, noțiunea de dependență liniară, noțiuni care intervin în mod curent cînd vorbim de corpuri, de sisteme de ecuații liniare ș. a.

Noțiunea de aplicație liniară este legată de noțiunea de spațiu liniar întocmai ca noțiunea de omomorfism de grup de noțiunea de grup.

Sînt ușor de asimilat diferite exemple concrete și familiare de spații vectoriale, între care spațiul vectorial al translațiilor planului (6.6). Spațiul translațiilor apare empiric în mintea elevilor ca multe noțiuni de geometrie și este bine să încercăm o clarificare algebrică a acestei noțiuni. De aici rezultă clar, de ce vectorii se adună „după regula paralelogramului".

O bună parte din carte este ocupată de polinoame, așa cum prevede și programa analitică de liceu.

Am urmărit să redau cu destule detalii legătura dintre polinom și funcție definită cu ajutorul unui polinom.

Formula lui Taylor este necesară în legătură cu rădăcinile multiple și cu aproximarea rădăcinilor unui polinom; pe de altă parte, este foarte ușoară prezentarea ei pentru polinoame.

În sfîrșit, am expus și polinoamele de mai multe variabile. Încă din clasele 8—9 elevii întîlnesc exerciții cu polinoame de mai multe variabile (binoame, trinomul la pătrat etc.), iar unii determinanți se dezvoltă plecînd de la fapte elementare din teoria polinoamelor de mai multe variabile (determinantul Vandermonde ș. a.). Astfel am găsit necesar să schițez cîteva fapte în legătură cu divizibilitatea în inelul $K[X_1, ..., X_m]$, cu polinoamele omogene și cu polinoamele simetrice.

Lucrarea se adresează atît elevilor din ultimele clase ale liceului, cît și profesorilor de matematică.

AUTORUL

I. ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

§ 1. Sisteme de două ecuaţii de gradul întîi cu două necunoscute. Formule de rezolvare. Determinanţi de ordinul al doilea

1.1. Se ştie că orice sistem de ecuaţii de gradul întîi cu două necunoscute se poate pune sub forma

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\}. \tag{1.1}$$

Pentru a rezolva acest sistem, se procedează în general astfel: se elimină x, înmulţind ecuaţia a doua cu a şi prima cu $-a'$ şi se adună apoi, termen cu termen, ecuaţiile astfel înmulţite; se găseşte ecuaţia

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c. \tag{1.2}$$

Se procedează la fel pentru eliminarea lui y din sistemul (1.1): se înmulţeşte ecuaţia întîi cu b', a doua cu $-b$ şi se adună; se obţine ecuaţia

$$(ab' - a'b)x = b'c - bc'. \tag{1.3}$$

Orice soluţie a sistemului (1.1) trebuie să verifice sistemul format de ecuaţiile (1.2) şi (1.3), care sînt ecuaţii cu cîte o *singură* necunoscută, deduse din (1.1).

Observăm că în amîndouă aceste ecuaţii coeficientul necunoscutei este acelaşi, anume $ab' - a'b$.

Dacă $ab' - a'b \neq 0$, aceste ecuaţii se rezolvă şi soluţiile lor

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}, \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \tag{1.4}$$

alcătuiesc soluţia sistemului (1.1). Să verificăm aceasta pentru prima ecuaţie (1.1) :

$$a\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}+b\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}=\frac{(ab'-a'b)c}{ab'-a'b}=c.$$

La fel se verifică şi ecuaţia a doua.

Formulele (1.4) se numesc *formulele lui Cramer* de rezolvare pentru sistemul (1.1). Ele sînt valabile numai pentru sistemele (1.1) pentru care *determinantul sistemului* $ab'-a'b$ *nu este nul.*

Vom discuta mai tîrziu sistemele pentru care $ab'-a'b=0$.

De asemenea, dacă vreunul dintre coeficienţii necunoscutelor din sistemul (1.1) este nul, formulele de rezolvare se simplifică ; nu considerăm aici, în mod special, asemenea cazuri.

1.2. Pentru a reţine uşor formulele (1.4) în loc de $ab'-a'b$, se scrie

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix},$$

punînd între două bare tabloul coeficienţilor sistemului (1).

În general, unui tablou de patru numere $\begin{matrix} u & v \\ u & v' \end{matrix}$ dispuse pe linii şi coloane, i se asociază numărul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}=uv'-u'v,$$

care se numeşte *determinantul* acelui tablou.

Cînd vorbim de determinantul sistemului (1.1), înţelegem determinantul asociat tabloului coeficienţilor acelui sistem. Cu notaţia introdusă, numărătorul lui x se scrie

$$\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}.$$

Se vede astfel, mai uşor, că numărătorul lui x se deduce din determinantul sistemului (1.1), înlocuind coeficienţii lui x cu termenii liberi din sistem.

La fel se deduce şi numărătorul lui y

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix},$$

înlocuind în determinantul sistemului coeficienţii lui y cu termenii liberi c şi c' din ecuaţiile respective.

Exemplu. Să se rezolve sistemul

$$5x - 7y = 1, \quad -3x + 5y = 1.$$

În acest caz $a = 5$, $b = -7$, $a' = -3$, $b' = 5$, $c = 1$, $c' = 1$;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 4, \quad \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 = 8;$$

prin urmare,

$$x = \frac{12}{4} = 3, \quad y = \frac{8}{4} = 2.$$

1.3. Exerciţii

1. Să se calculeze determinanţii

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}, \; d_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \; d_3 = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix},$$

$$d_4 = \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}, \; d_5 = \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}, \; d_6 = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix},$$

$$d_7 = \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix},$$

a, b fiind numere raţionale, reale sau complexe, oarecare, iar n fiind un număr întreg.

2. Însemnînd cu α, β, γ unghiuri oarecare, să se calculeze determinanţii

$$a_1 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}, \; a_2 = \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}, \; a_3 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix},$$

$$a_4 = \begin{vmatrix} \sin\alpha + \sin\beta & \cos\beta + \cos\alpha \\ \cos\beta - \cos\alpha & \sin\alpha - \sin\beta \end{vmatrix}, \; a_5 = \begin{vmatrix} 2\sin\alpha\cos\alpha & 2\sin^2\alpha - 1 \\ 2\cos^2\alpha - 1 & 2\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix}$$

3. Însemnînd cu t un număr real oarecare, să se calculeze determinanţii

$$b_1 = \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}, \quad b_2 = \begin{vmatrix} \frac{(1-t)^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{2t}{1+t^2} & -\frac{(1+t)^2}{1+t^2} \end{vmatrix},$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}.$$

4. Însemnînd cu a, b, c, d numere întregi, raţionale sau reale şi i însemnînd $\sqrt{-1}$, să se calculeze

$$c_1 = \begin{vmatrix} a & c+di \\ c-di & b \end{vmatrix}, \quad c_2 = \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}, \quad c_3 = \begin{vmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{vmatrix},$$

$$c_4 = \begin{vmatrix} \frac{1-a^2+2ai}{1+a^2} & 1 \\ 1 & \frac{1-a^2-2ai}{1+a^2} \end{vmatrix}.$$

5. Să se rezolve, cu formulele lui Cramer, următoarele sisteme:

a) $\begin{aligned} 3x+5y &= 1, \\ 4x+7y &= 1; \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x+4y &= 3, \\ 3x+5y &= -7; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x-7y &= 2, \\ 3y &= -1; \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} 3x+7y+12 &= 0, \\ 5x+11y-10 &= 0; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x\cos\alpha - y\sin\alpha &= \cos\beta, \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha &= \sin\beta; \end{aligned}$ (α şi β sînt numere reale)

f) $\begin{aligned} x\,\mathrm{tg}\,u + y &= \sin(u+v), \\ x - y\,\mathrm{tg}\,u &= \cos(u+v), \end{aligned}$ (u şi v sînt reale, $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k este întreg).

6. $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$ dacă şi numai dacă $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, unde a, b, a', b' sînt numere complexe.

§ 2. Sisteme de m ecuaţii de gradul întîi cu n necunoscute (forma generală)

2.1. Pentru a uşura înţelegerea, vom nota necunoscutele cu aceeaşi literă x, prevăzută cu indicii : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Coeficienţii necunoscutelor vor fi notaţi şi ei cu o singură literă, de exemplu a, prevăzută cu doi indici: a_{ij}; indicele i (primul) este pus ca să arate ecuaţia în care intră coeficientul a_{ij}, iar indicele j (al doilea) este egal cu indicele necunoscutei x_j pe care o înmulţeşte coeficientul a_{ij} (în ecuaţia i) astfel: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$. Semnul de suspensie ... dintr-o ecuaţie ţine locul termenilor nescrişi, dar care se subînţeleg. Termenii liberi vor fi notaţi cu $b_1, \ldots, b_m$. Deci sistemul general de n ecuaţii de gradul întîi cu n necunoscute se scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1)$$

Linia punctată dintre ecuaţia a doua şi ecuaţia m (ultima) ţine locul ecuaţiilor din sistem care nu se pot scrie, dar care se subînţeleg.

Un sistem ca (2.1) mai poartă şi numele de *sistem de ecuaţii liniare*.

2.2. Un alt mod de a scrie sistemul (2.1) este următorul :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \qquad (2.2)$$

Semnul din partea stîngă a ecuaţiei (2.2) se citeşte „sumă în raport cu indicele j, de $a_{ij}x_j$, pentru j de la 1 la n“ sau „suma tuturor termenilor $a_{i1}x_1, a_{i2}x_2, \ldots, a_{in}x_n$“.

În (2.2) a fost scrisă o singură ecuaţie a sistemului (2.1) aceea de indice i, dar paranteza $(i = 1, 2, \ldots, m)$ scrisă în acelaşi rînd cu ecuaţia, la dreapta ei, este pusă ca să arate că este vorba de m ecuaţii, anume de ecuaţiile corespunzătoare indicilor $i=1, 2, \ldots, m$.

În sistemele de ecuaţii pe care le vom considera în cele ce urmează, coeficienţii vor fi numere complexe, în particular reale, raţionale sau întregi.

2.3. Sume ca cea din ecuaţia (2.2) intervin adesea în calcule; de aceea sînt necesare unele precizări. Orice sumă $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ se mai notează, pentru prescurtare, cu simbolul $\sum_1^n {}_i a_i$ sau astfel: $\sum_{i=1}^{n} a_i$, sau $\sum_{i \in I} a_i$ cu $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, sau încă $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$. $\sum$ este litera „sigma" din alfabetul grec, iar simbolul $\sum_1^n {}_i a_i$ se citeşte „sumă în raport cu i, de a_i, pentru i de la 1 la n".

Exemple

1) $\sum_{1 \leqslant i \leqslant 3} a_i = a_1 + a_2 + a_3$.

2) $\sum_{1 \leqslant n \leqslant 4} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.

3) $\sum_{n=1}^{11} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{11}$.

4) $\sum_{n=1}^{10} n^{n-1} = 1 + 2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 10^9$.

5) $\sum_0^9 {}_m (m+1)^m = \sum_1^{10} {}_n n^{n-1}$.

Evident, avem egalitatea $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{h=1}^{n} a_h$, căci amîndouă simbolurile înseamnă acelaşi lucru, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ şi c sînt numere complexe, de exemplu, putem scrie

$$c\left(\sum_1^n {}_i a_i\right) = c(a_1 + \ldots + a_n) = ca_1 + \ldots + ca_n = \sum_1^n {}_i ca_i .$$

Uneori termenii unei sume sînt însemnaţi cu doi sau cu mai mulţi indici. Astfel expresia $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{ij} \right)$, unde I şi J sînt mulţimi finite, înseamnă că se consideră, pentru fiecare i, suma $\sum_{j \in J} a_{ij}$ şi apoi se ia

suma acestor sume, pentru $i \in I$. Din cauza comutativităţii şi asociativităţii operaţiei de adunare, avem egalitatea

$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{ij}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{ij}\right),$$

care arată că atunci cînd i şi j parcurg independent două mulţimi de indici, putem interverti operaţiile de însumare.

Mai particular este următorul exemplu :

$$\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant 3\\ 1\leqslant n\leqslant 5}} n^m = \sum_{m=0}^{3}\left(\sum_{n=1}^{5} n^m\right) = \sum_{0}^{3}{}_m (1^m + 2^m + 3^m + 4^m + 5^m) =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 +$$
$$+ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 +$$
$$+ 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 +$$
$$+ 1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 =$$

$$= \sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{m=0}^{3} n^m\right) = \sum_{1\leqslant n\leqslant 5} (n^0 + n^1 + n^2 + n^3) =$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 +$$
$$+ 1 + 2 + 2^2 + 2^3 +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ 1 + 5 + 5^2 + 5^3.$$

E clar că avem

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_p) =$$

$$= a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_p + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_2 b_p + \ldots +$$

$$+ a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_p = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_i b_j\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right).$$

Mai putem scrie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} b_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} b_j a_i = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j.$$

O b s e r v a ţ i e. În relaţiile precedente i şi j primesc valorile 1, 2, ..., independent unul de altul chiar dacă ar fi $p = n$. Trebuie să ne ferim de a scrie

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

deoarece este greşit, cum se vede, în cazul $n = 2$:

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \neq a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Pentru a evita astfel de greşeli, este bine să folosim indicii de însumare diferiţi, în sume distincte, ceea ce se poate, întrucît indicele de însumare poate fi notat cu diferite litere; el nu apare în suma efectuată.

§ 3. Matrice

3.1. În teoria sistemelor de ecuaţii liniare se întîlnesc adesea diferite tablouri de numere: tabloul coeficienţilor necunoscutelor unui sistem de ecuaţii, tabloul care se deduce din acesta prin înlocuirea fiecăruia dintre coeficienţii necunoscutei x_1 cu termenul liber din ecuaţia respectivă etc.

În locul cuvîntului tablou, care, în vorbirea curentă, are şi alte înţelesuri, se foloseşte denumirea de *matrice*, pentru a indica un tablou dreptunghiular de $m \times n$ numere (nu numai decît distincte), dispuse pe m linii (orizontale) şi n coloane (verticale). O matrice se notează cuprinzînd elementele sale, dispuse pe linii şi coloane, între două paranteze astfel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

sau mai scurt (a_{hi}) sau folosind bare duble, în loc de paranteze:

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\| \text{ etc.}$$

Alteori, diferite matrice se notează cu literele mari ale alfabetului A, B, ...

Liniile unei matrice se numerotează începînd de sus în jos: linia întîi, a doua etc.; coloanele se numerotează de la stînga la dreapta: coloana întîi, a doua etc.

Numerele care dispuse pe linii şi coloane alcătuiesc o matrice se numesc *elementele* sale. În general, aceste elemente vor fi numere complexe, în particular reale, raţionale sau întregi.

Astfel spunem : în matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nm} \end{pmatrix}$$

elementul din coloana a doua şi din ultima linie este a_{n2} ; a_{22} este elementul din linia a doua şi din coloana a doua etc., a_{ij} este elementul din linia i şi din coloana j.

Se numeşte *matrice pătrată de ordinul n* o matrice cu n linii şi n coloane.

Astfel matricele

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

sînt matrice pătrate : prima de ordinul al doilea, a doua de ordinul al treilea.

Într-o matrice pătrată, elementele $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formează diagonala principală a matricei, elementele $a_{n1}, a_{n-1,2}, \ldots, a_{1n}$ formează diagonala a doua.

O matrice pătrată în care numai termenii de pe diagonala principală sînt diferiţi de zero se numeşte *matrice diagonală.*

Transpusa unei matrice A este matricea care are drept linii coloanele lui A, iar drept coloane liniile lui A ; transpusa matricei A se notează cu simbolul ${}^tA$. Astfel dacă

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix},$$

atunci

$${}^tA = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}.$$

Două matrice A şi B se zic egale dacă au acelaşi număr m de coloane şi acelaşi număr n de linii şi dacă fiecare element a_{ij} al matricei A este egal cu elementul b_{ij} a matricei B.

Astfel matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ și } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

nu sînt egale; matricea A este egală cu transpusa matricei B.

O matrice pătrată A care este egală cu transpusa sa ${}^tA$ se zice *simetrică* (pentru că este simetrică față de diagonala principală). Astfel matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ este simetrică; matricea

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

este simetrică dacă și numai dacă $a_{ij} = a_{ji}$ pentru $i = 1, 2, 3$ și $j = 1, 2, 3$.

3.2. Operații cu matrice

3.2.1. Să considerăm matricele cu două linii și două coloane. În mulțimea acestor matrice să definim operația de adunare în felul următor: dacă

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

să numim *suma* $A + B$ a acestor două matrice matricea

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

în care $x_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pentru $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

Astfel, cu această lege de adunare, avem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

În același mod se definește suma a două matrice oarecare, cu același număr m de linii și același număr n de coloane:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} \dots b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} \dots c_{mn} \end{pmatrix}$$

cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Adunarea matricelor are următoarele proprietăţi:

I. Este *asociativă*: $(A + B) + C = A + (B + C)$, unde

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, elementul din linia i şi coloana j din matricea $(A+B)+C$ este egal cu $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$, adică egal cu elementul din linia i şi coloana j din matricea $A + (B + C)$. Şi aceasta pentru orice $i = 1, 2$, şi pentru orice $j = 1, 2$.

II. Este *comutativă*: $A + B = B + A$.

Într-adevăr, $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, pentru orice $i = 1, 2$ şi orice $j = 1, 2$.

III. Se numeşte *matricea zero*, în mulţimea matricelor cu două linii şi două coloane, matricea ale cărei elemente sînt toate egale cu zero; se notează această matrice cu O. E clar că

$$A + O = O + A = A, \qquad (a_{ij} + 0 = a_{ij}).$$

IV. Pentru fiecare matrice A există o *matrice opusă*

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix},$$

astfel încît $A + (-A) = O$.

Exemplu. Opusa matricei $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ este $\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Deoarece matricele cu două linii şi două coloane au proprietăţile precedente I—IV, se spune că aceste matrice cu adunarea ca operaţie de compunere formează un *grup comutativ*.

Ne-am ocupat de matrice cu două linii şi două coloane, pentru a fixa ideile, dar putem considera, la fel, matrice cu un număr m de linii şi un număr n de coloane.

3.2.2. *Înmulţirea cu un număr*. Fie A o matrice oarecare, p, q, r numere complexe şi să considerăm matricea, ale cărei elemente se deduc din elementele matricei A înmulţindu-le cu r (şi lăsînd neschimbate linia şi coloana în care se găsesc); matricea A se numeşte *produsul* dintre numărul r şi matricea A. Uneori se scrie rA în loc de $r \cdot A$ omiţîndu-se semnul înmulţirii.

Exemplu. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ şi $r = -1$; $\quad rA = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Înmulţirea matricelor cu numere are următoarele proprietăţi:

1. $1 \cdot A = A$;

2. $r(p \cdot A) = (r\,p)\,A$.

Proprietatea 1 este evidentă: dacă a_{ij} este elementul din linia i şi coloana j al lui A, elementul matricei $1 \cdot A$ din aceeaşi linie şi coloană este $1 \cdot a_{ij} = a_{ij}$.

Proprietatea 2 se demonstrează în acelaşi mod: dacă a_{ij} este elementul din linia i şi coloana j al matricei A, elementul din linia i şi coloana j în matricea $p \cdot A$ este pa_{ij}; iar în matricea $r(p \cdot A)$ este $r(pa_{ij}) = (rp)a_{ij}$, adică acelaşi ca şi elementul din linia i şi coloana j din matricea $(rp) \cdot A$.

În legătură cu adunarea numerelor complexe, înmulţirea matricelor cu numere are proprietatea

3. $(p + q) \cdot A = p \cdot A + q \cdot A$.

Într-adevăr, dacă a_{ij} este elementul lui A din linia i şi coloana j, atunci elementul lui $(p + q) \cdot A$ din linia i şi coloana j este $(p + q)a_{ij} = pa_{ij} + qa_{ij}$, adică, potrivit cu definiţia adunării matricelor, egal cu elementul din linia i şi coloana j al matricei $p \cdot A + q \cdot A$.

Proprietatea 3 se mai enunţă astfel: înmulţirea matricelor cu numere este distributivă faţă de adunarea numerelor.

Din proprietatea 3 rezultă că putem scrie $p \cdot A = [(p - q) + q] \cdot A = (p - q) \cdot A + q \cdot A$; prin urmare, $p \cdot A - q \cdot A = (p - q) \cdot A$, ceea ce arată că înmulţirea matricelor cu numere este distributivă şi faţă de scăderea numerelor.

În particular rezultă $O \cdot A = (p - p) \cdot A = p \cdot A - p \cdot A = 0$.

În legătură cu adunarea matricelor, înmulţirea matricelor cu numere are următoarea proprietate:

4. $p \cdot (A + B) = p \cdot A + p \cdot B$ (presupunînd că suma $A + B$ este definită, adică presupunînd că A şi B au acelaşi număr n de linii şi acelaşi număr m de coloane).

Într-adevăr dacă $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, atunci $A + B = C = (c_{ij})$ cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; prin urmare, $p \cdot (A + B) = (pc_{ij}) = (pa_{ij} + pb_{ij}) = (pa_{ij}) + (pb_{ij}) = p \cdot A + p \cdot B$.

Această proprietate se exprimă spunînd că *înmulţirea matricelor cu numere este distributivă faţă de adunarea matricelor.*

3.2.3. *Înmulțirea matricelor.* Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} \dots b_{2p} \\ \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{np} \end{pmatrix}$$

două matrice astfel încît numărul coloanelor lui A să fie egal cu numărul liniilor lui B; matricea

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \dots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} \dots x_{2p} \\ \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} \dots x_{mp} \end{pmatrix}$$

ale cărei elemente x_{ij} sînt date de formulele

$$x_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj}, \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p)$$

se numește *produsul matricelor* A și B; se scrie

$$X = AB.$$

Exemplu

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bx' & ay + by' & az + bz' \\ a'x + b'x' & a'y + b'y' & a'z + b'z' \end{pmatrix}.$$

Formulele de calcul ale elementelor produsului se pot enunța în cuvinte astfel: elementul din linia i și coloana j a produsului este suma produselor care se obțin înmulțind elementele liniei i a primei matrice cu elementele corespunzătoare din coloana j a matricei a doua („corespunzătoare" înseamnă: primul cu primul, al doilea cu al doilea etc., ultimul cu ultimul). Observăm că ordinea factorilor în produsul a două matrice nu este indiferentă: schimbînd ordinea factorilor, condiția ca numărul coloanelor primei matrice să fie egal cu numărul liniilor celei de-a doua matrice poate să înceteze de a mai fi îndeplinită și atunci produsul nu mai are sens. Dar chiar dacă această condiție rezultă îndeplinită, schimbînd ordinea factorilor, produsul poate să se schimbe.

Exemplu. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 18 & 19 \\ -16 & -13 \end{pmatrix}.$$

Avem

$$AB = \begin{pmatrix} -14 & -7 \\ -26 & -8 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 75 & 131 \\ -55 & -97 \end{pmatrix};$$

$$AB \neq BA.$$

Înmulţirea matricelor are următoarele *proprietăţi* :

1. Fie A, B, C trei matrice astfel încît să existe produsele AB, BC, adică astfel încît numărul liniilor lui A să fie egal cu numărul coloanelor lui B, iar numărul liniilor lui B să fie egal cu numărul coloanelor lui C. În acest caz, produsele $A(BC)$ şi $(AB)C$ sînt definite şi sînt egale.

Demonstraţie. Să punem în evidenţă elementele matricelor A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & \dots & c_{pq} \end{pmatrix}.$$

Să punem $X = AB$;

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mp} \end{pmatrix}$$

cu $x_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hj}$ pentru $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$.

Să punem de asemenea $Y = BC$;

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1q} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nq} \end{pmatrix}$$

cu $y_{kl} = b_{k1}c_{1l} + b_{k2}c_{2l} + \dots + b_{kp}c_{pl} = \sum_{j=1}^{p} b_{kj}c_{jl}$,

pentru $k = 1, 2, \dots, n$, $\quad l = 1, 2, \dots, q$.

Întrucît matricea Y are m linii și p coloane, produsul $(AB)C = YC$ are sens : este o matrice cu m linii și q coloane și elementul său din linia i și coloana l este

$$x_{i1}c_{1l} + \ldots + x_{ip}c_{pl} = \sum_{h=1}^{p} x_{ih}c_{hl} \qquad \sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jh}c_{hl}.$$

Întrucît matricea Y are n linii, adică tot atîtea cîte coloane are matricea A, produsul $AY = A(BC)$ are sens și este o matrice cu m linii [ca și A, deci ca și $(AB)C$] și q coloane [ca și C, deci ca și $(AB)C$], iar elementul său din linia i și coloana l este

$$a_{i1}y_{1l} + \ldots + a_{in}y_{nl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_{jl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{p} a_{ij}b_{jh}c_{hl}.$$

Deci avem egalitatea

$$\sum_{h=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jh}c_{hl} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{p} a_{ij}b_{jh}c_{hl}.$$

Putem justifica această egalitate în felul următor: suma din partea stîngă este formată din pn termeni, numerotați cu perechile de indici (h, j), $1 \leqslant h \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$ (indicii i și l sînt ficși); în partea dreaptă a semnului de egalitate avem np termeni, de asemenea numerotați cu perechile (h, j), $1 \leqslant h \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$; iar termenii din ambele părți ale semnului de egalitate, care sînt însemnați cu aceeași pereche de indici (h, j), sînt egali.

Astfel matricele $(AB)C$ și $A(BC)$ au elementele din linia i și din coloana l egale, pentru orice $i = 1, 2, \ldots, m$ și $l = 1, 2, \ldots, q$; aceasta înseamnă că cele două matrice sînt egale.

2. Dacă matricele A și A' au același număr m de linii și același număr n de coloane și dacă B este o matrice cu n linii și p coloane, atunci are loc relația

$$(A + A')B = AB + A'B.$$

Într-adevăr, fie $A = (a_{ij})$, $A' = (a'_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ și $B = (b_{hl})$, $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, p$. Avem $A + A' = (a_{ij} + a'_{ij})$; elementul din linia i și coloana j din produsul AB este $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$; elementul din linia i și coloana j din produsul $A'B$ este $a'_{ij}b_{1j} + a'_{i2}b_{2j} + \ldots + a'_{in}b_{nj}$; elementul din linia i și coloana j în produsul $(A + A')B$ este $(a_{i1} + a'_{i1})b_{1j} + (a_{i2} + a'_{i2})b_{2j} + \ldots + (a_{in} + a'_{in})b_{nj}$, adică tocmai egal cu suma elementelor corespunzătoare din AB și $A'B$; aceasta demonstrează egalitatea din enunț.

La fel se demonstrează că dacă B' este o matrice cu m coloane şi p linii, atunci

$$B'(A + A') = B'A + B'A'.$$

Aceste două proprietăţi ale înmulţirii se enunţă spunînd că *înmulţirea matricelor este distributivă faţă de adunare, atît la dreapta cît şi la stînga.*

3. Fie r un număr complex şi A, B două matrice pentru care are sens produsul AB; în acest caz are loc relaţia

$$r(AB) = (rA)\,B = A(rB).$$

Într-adevăr, elementul din linia i şi coloana j a matricei $r(AB)$ este de forma

$$r(a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \ldots + a_{in}\,b_{nj}) = (ra_{i1})\,b_{1j} + \ldots + (ra_{in})\,b_{nj},$$

adică egal cu elementul din linia i şi coloana j a matricei $(rA)B$ şi egal şi cu elementul $a_{i1}(rb_{1j}) + \ldots + a_{in}(rb_{nj})$ din linia i şi coloana j a matricei $A(rB)$.

Matricea pătrată U cu n linii (şi n coloane), care are elementele de pe diagonala principală egale cu 1, iar celelalte egale cu zero, adică matricea

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

se numeşte *matricea unitate* de ordinul n. Dacă A este o matrice pentru care are sens produsul AU, atunci $AU = A$; de asemenea dacă B este o matrice pentru care are sens produsul UB, atunci $UB = U$; în particular, dacă A este o matrice pătrată cu acelaşi număr de linii şi de coloane ca şi U, atunci $AU = UA = A$.

Exerciţiu. Să se verifice egalitatea $AU = A$ calculînd elementele produsului AU.

3.2.4. *Puterile unei matrice pătrate* A se definesc prin recurenţă, punînd

$$A^0 = U,\ A^1 = A,\ A^2 = A^1 \cdot A = A \cdot A, \ldots, A^{n+1} = A^n \cdot A, \ldots$$

Exemple. 1) Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; avem

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^0 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \ldots$$

$$\ldots,\ A^n = \begin{pmatrix} 2^n & a_n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \text{ cu } a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n-1}.$$

2) Fie $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; avem $B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B^1 = B$, $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

O matrice A, pentru care există un număr natural n astfel încît A^n să fie matricea zero, se zice *nilpotentă*. Matricea B din exemplul precedent este nilpotentă.

Puterile întregi (şi pozitive) ale unei matrice pătrate se bucură de unele dintre proprietăţile de calcul ale puterilor de întregi, de numere raţionale etc. Astfel au loc relaţiile

$$A^m \cdot A^n = A^{m+n}, \qquad (m, n \geqslant 0). \tag{3.1}$$

$$(A^m)^n = A^{mn}, \tag{3.2}$$

Putem demonstra aceste relaţii prin inducţie. Astfel $A^m \cdot A = A^{m+1}$ prin definiţie. Presupunînd că $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$, rezultă $A^m \cdot A^{n+1} = A^m \cdot (A^n \cdot A) = (A^m A^n)A = A^{m+n} \cdot A = A^{(m+n)+1} = A^{m+(n+1)}$.

De asemenea $(A^m)^1 = A^m = A^{m \cdot 1}$. Presupunînd că $(A^m)^n = A^{mn}$, rezultă $(A^m)^{n+1} = (A^m)^n \cdot A^m = A^{mn} \cdot A^m = A^{mn+m} = A^{m(n+1)}$.

3.3. Exerciţii

1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze AB, BA (se va observa că $AB \neq BA$); să se arate că

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(inducţie asupra lui n).

2. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze produsele BA și AB; să se arate că $BA = {}'(AB)$.

3. Fie

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze produsul XYZ. Să se verifice că $(XY)Z = X(YZ)$.

4. Să se deducă direct din definiția înmulțirii matricelor cu numere că, p și q fiind numere complexe iar A o matrice oarecare, are loc relația $(p-q)A = pA - qA$; dacă $p = 0$, atunci $pA = 0$; dacă $A = 0$, atunci $pA = 0$; $(-1)A = -A$.

Indicație. Se calculează elementul din linia i și coloana j în fiecare dintre matricele produs.

5. Fie

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se scrie matricea aU, a fiind un număr complex.

6. În 3.2.4 a fost definită matricea A^n, A fiind o matrice pătrată; să se arate că A^n este totuna cu produsul a n factori egali cu A. (Inducție asupra lui n).

7. Să se calculeze A^3 în ipoteza că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea care are toate elementele de sub diagonala principală egale cu zero, iar celelalte elemente egale cu 1. (Se calculează A^2 și apoi $A^3 = A^2 \cdot A$.)

8. Fie

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Să se arate că orice matrice cu două linii şi două coloane este de forma

$$aI + bJ + cK + dL;$$

orice matrice simetrică cu două linii şi două coloane este de forma $aI + b(J + L) + cK$.

9. A, B, C fiind matrice pentru care au sens produsele AB, AC, să se arate că $A(B - C) = AB - AC$.

10. Două matrice A, B care verifică relaţia $AB = BA$ se numesc *permutabile*; se mai spune că A este permutabilă cu B. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

să se arate că o matrice B este permutabilă cu A, dacă şi numai dacă este o matrice diagonală (cu elementele nesituate pe diagonala principală egale cu zero). Generalizare. (A poate fi orice matrice pătrată diagonală cu elementele de pe diagonală diferite între ele şi concluzia rămîne valabilă.)

11. Dacă A şi B sînt permutabile, atunci $(AB)^n = A^nB^n$ (inducţie în raport cu n).

12. O matrice M se zice *idempotentă* dacă $M^2 = M$.

Să se cerceteze dacă matricele

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 25 & -20 \\ 30 & -24 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -26 & -18 & -27 \\ 21 & 15 & 21 \\ 12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$$

sînt idempotente.

13. O matrice I se zice *involutivă* dacă $I^2 = U$, U fiind matricea unitate.

Să se verifice că matricea $I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ este involutivă, la fel este şi matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Să se demonstreze că matricea I este involutivă dacă şi numai dacă matricea $M = \frac{1}{2}(I + U)$ este idempotentă.

R. Fie $I^2 = U$; rezultă $M^2 = \frac{1}{4}(I^2 + 2I + U) = \frac{1}{4}(2I + 2U) = M$. **Reciproc,** dacă $M^2 = M$, atunci $I^2 = (2M - U)^2 = 4M^2 - 4M + U = U$.

14. Fie $A = (a_{ih})$, $B = (b_{kj})$; să se arate că ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Indicație. Elementul din linia i și coloana j din ${}^t(AB)$ este egal cu elementul din linia j și coloana i a matricei AB, adică cu $a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \ldots + a_{jn}b_{ni}$; acesta se poate scrie sub forma $b'_{i1}a'_{1j} + \ldots + b'_{in}a'_{nj}$, dacă punem $b'_{ik} = b_{ki}$, $a'_{kj} = a_{jk}$; prin urmare, este egal cu elementul din linia i și coloana j a produsului ${}^tB\,{}^tA$; ...

§ 4. Sisteme de două ecuații omogene de gradul întîi cu trei necunoscute

4.1. Un sistem particular de ecuații liniare, care ne va servi în cele ce urmează, este sistemul

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= 0 \\ a'x + b'y + c'z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

de două ecuații liniare omogene (adică fără termeni liberi) cu trei necunoscute.

O soluție a sistemului (4.1) este $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (soluție banală). Dar sistemul (4.1) are și alte soluții: pentru a le obține, raționăm astfel.

1) Considerăm mai întîi cazul în care sînt nuli determinanții

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

În acest caz, coeficienții celor două ecuații sînt proporționali (v. exercițiul 6, § 1), deci este nul și determinantul

$$\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

și sistemul (4.1) se reduce de fapt la o singură ecuație. Aceasta se rezolvă în raport cu una dintre necunoscutele care are coeficientul diferit de zero, dînd valori arbitrare celorlalte două necunoscute.

Exemplu. Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y - 7z &= 0 \\ 4x + 10y - 14z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

În acest caz,

$$a = 2,\ b = 5,\ c = -7;\ a' = 4,\ b' = 10,\ c' = -14;$$

$$ab' - a'b = ac' - a'c = 0 \text{ și } bc' - b'c = 0.$$

Ecuația a doua se deduce din prima prin înmulțire cu 2, astfel încît sistemul se reduce, de fapt, la o singură ecuație, la prima.

Rezolvăm această ecuație în raport cu x:

$$x = -\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}z.$$

Pentru orice sistem de valori date lui y și z, găsim o valoare pentru x, care împreună cu cele date formează o soluție a ecuației și, prin urmare, a sistemului dat. Astfel, punînd $y = 10$, $z = 10$, deducem $x = (-5) \cdot 5 + 7 \cdot 5 = 10$; numerele 10, 10, 10 formează o soluție, după cum se poate verifica. La fel numerele $y = 4$, $z = 2$, $x = -3$ formează o soluție pentru același sistem.

2) Să presupunem acum că cel puțin unul dintre determinanți este diferit de zero; de exemplu

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0.$$

În acest caz, se trec termenii cu z în partea dreaptă a semnului de egalitate și se rezolvă sistemul obținut

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= -cz \\ a'x + b'y &= -c'z \end{aligned}\right\}$$

cu regula lui Cramer, ca și cum z ar fi un parametru; se obține

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -cz & b \\ -c'z & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-czb' + bc'z}{ab' - a'b} = \frac{(bc' - cb')z}{ab' - a'b}, \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} a & -cz \\ a' & -c'z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} = \frac{-ac'z + a'cz}{ab' - a'b} = \frac{-(ac' - a'c)z}{ab' - a'b}, \end{aligned}\right\} \quad (4.2)$$

Acestea sînt formulele de rezolvare ale sistemului (4.1); ele se pot pune sub forma simetrică

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} \tag{4.3}$$

cu $A = bc' - cb' = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}$, $-B = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$,

$$C = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Observăm regula de formare a numitorilor A, B, C; A, numitorul lui x, este determinantul matricei care se obţine suprimînd coloana coeficienţilor lui x din matricea coeficienţilor sistemului (4.1); $-B$, numitorul lui y, este determinantul matricei care se obţine suprimînd coloana coeficienţilor lui y din matricea coeficienţilor sistemului (4.1); C, numitorul lui z, este determinantul matricei obţinut prin suprimarea coloanei coeficienţilor lui z din sistemul (4.1).

Dacă vreunul dintre numitorii B, C este nul (numai unul poate fi nul, în cazul de faţă), atribuim necunoscutei respective valoarea zero, după cum rezultă din formulele de rezolvare, în prima formă.

Exemple. α) Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 5x - 7y + 3z &= 0 \\ 3x + y - 5z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

În acest caz

$$a = 5,\ b = 7,\ c = 3;\ a' = 3,\ b' = 1,\ c' = -5;$$

$$A = (-7)(-5) - 3\cdot 1 = 32,\quad -B = 5(-5) - 3\cdot 3 = -34,\quad C = 5\cdot 1 - (-7)\cdot 3 = 26.$$

Orice sistem de numere proporţionale cu numerele 32, 34 şi 26 este o soluţie a sistemului dat (să se verifice, de exemplu, că {16, 17, 13} este o soluţie).

β) Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 5x - 7y + 3z &= 0 \\ 10x + y + 6z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

În acest caz avem

$$A = (-7)\cdot 6 - 3\cdot 1 = -45,\quad -B = 5\cdot 6 - 3\cdot 10 = 0,\quad C = 5\cdot 1 + 7\cdot 10 = 75.$$

Orice sistem de numere proporţionale cu -45, 0, 75 este o soluţie; înseamnă că în orice soluţie a acestui sistem valoarea lui y este 0.

4.2. **Exerciții**

1. Să se rezolve sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2x + 5y - 7z &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

întîi direct, apoi folosind formulele (4.3).

2. Să se rezolve sistemul

$$\left.\begin{aligned} 2x + ay + 7z &= 0 \\ ax + 2y + 21z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Să se discute în raport cu a.

3. Să se rezolve sistemul

$$\left.\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= 0 \end{aligned}\right\}$$

în care a, b, c sînt numere raționale. Să se discute soluția după valorile lui a, b, c.

4. Să se rezolve sistemul

$$\left.\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 0 \\ x + a^2y + az &= 0 \end{aligned}\right\}$$

știind că $a^3 - 1 = 0$.

§ 5. Sisteme de trei ecuații de gradul întîi cu trei necunoscute

5.1. **Formule de rezolvare.** Orice sistem de trei ecuații de gradul întîi cu trei necunoscute se poate scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\}. \qquad (5.1)$$

Pentru a rezolva acest sistem, putem elimina mai întîi necunoscuta x_3. Această operație ne va duce la un sistem de două ecuații în x_1 și x_2, care se rezolvă prin procedeul expus în § 1 p. 1. Introducînd valorile găsite pentru x_1 și x_2 în oricare dintre ecuațiile sistemului (5.1), obținem o valoare pentru x_3 care, împreună cu valorile găsite

pentru x_1 şi x_2, ne dă o soluţie a sistemului (5.1). Pentru scopul nostru, este însă mai comod să eliminăm dintr-o dată necunoscutele x_2 şi x_3 din sistemul (5.1) în modul următor :

Să înmulţim, în prima ecuaţie din sistemul (5.1), toţi termenii cu x pe care urmează să-l determinăm ; în a doua ecuaţie din acelaşi sistem să înmulţim toţi termenii cu y, iar în ecuaţia a treia cu z. Adunînd apoi termen cu termen ecuaţiile obţinute, vom căpăta ecuaţia

$$\begin{aligned}(a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z)\,x_1 + (a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z)x_2 + \\ + (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z)x_3 = b_1x + b_2y + b_3z.\end{aligned} \qquad (S)$$

Putem alege numerele x, y, z astfel încît, în ecuaţia rezultată (S), coeficienţii necunoscutelor x_2 şi x_3 să fie nuli. Este destul, pentru aceasta, ca x, y, z să fie o soluţie a sistemului

$$\left.\begin{aligned}a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = 0\end{aligned}\right\}. \qquad (5.2)$$

Rezolvînd acest sistem cu formulele (4.3) de la § 4, găsim pentru x, y, z trei numere proporţionale cu

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\,;\; A_{21} = -(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})\,;$$
$$A_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

Să luăm chiar $x = A_{11}$, $y = A_{21}$, $z = A_{31}$; cu aceasta, coeficientul lui x_1 din ecuaţia S rezultă egal cu

$$\begin{aligned}D = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned} \qquad (5.3)$$

Coeficienţii lui x_2 şi x_3 sînt nuli, cum se poate verifica, iar termenul liber, pe care să-l notăm cu D, este egal cu

$$\begin{aligned}D_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31} = b_1a_{22}a_{33} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} + \\ + b_2a_{13}a_{32} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{13}a_{22}.\end{aligned}$$

Rezultatul eliminării necunoscutelor x_2 şi x_3 din sistemul (5.1) se scrie astfel :

$$Dx_1 = D_1\,. \qquad (5.4)$$

În acelaşi mod se pot elimina necunoscutele x_1 şi x_3 din sistemul

(5.1). Ecuația care se obține ne va da pe x_2. Numerele x, y, z din ecuația (S) vor trebuie acum să satisfacă condițiile

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z &= 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

în locul condițiilor (5.2). Satisfacem aceste condiții cu orice sistem de trei numere proporționale cu

$$A_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}), \quad A_{22} = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31},$$

$$A_{32} = -(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}).$$

Să luăm, de data aceasta, $x = A_{12}$, $y = A_{22}$, $z = A_{32}$. Cu această alegere pentru x, y, z, coeficienții lui x_1 și x_3 din ecuația (S) se anulează, iar coeficientul lui x_2 devine

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{32} +$$

$$+ a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32},$$

adică egal tot cu D.

Să punem $D_2 = b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}$. Cu aceasta, rezultatul eliminării necunoscutelor x_1 și x_3 din sistemul (5.1) se scrie

$$Dx_2 = D_2. \tag{5.6}$$

În același mod, luînd pentru x, y, z o soluție a sistemului

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

și anume

$$x = A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

$$y = -A_{23} = -(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}),$$

$$z = A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

se deduce din ecuația (S) ecuația

$$Dx_3 = D_3 \tag{5.8}$$

în care

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}, \quad \text{iar } D_3 = b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}.$$

Orice soluție a sistemului (5.1) trebuie să verifice ecuațiile (5.4), (5.6) și (5.8). Dacă $D \neq 0$, aceste ecuații au soluții determinate

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} \tag{5.9}$$

care formează o soluție a sistemului (5.1). Să facem verificarea pentru prima ecuație din sistemul (5.1):

$$\frac{1}{D}(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + a_{13}D_3) = \frac{1}{D}[a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) +$$

$$+ a_{12}(b_1A_{12} + b_3A_{22} + b_3A_{32}) + a_{13}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33})] =$$

$$= \frac{1}{D}[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) +$$

$$+ b_3(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})].$$

Ținînd seama că

$$A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \; A_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}),$$

$$A_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$

deducem că paranteza care înmulțește pe b_1 este egală cu

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = D.$$

La fel se găsește că paranteza care înmulțește pe b_2 este nulă, ca și paranteza care înmulțește pe b_3; prin urmare $a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} +$ $+ a_{13}\frac{D_3}{D} = b_1$. Lăsăm ca exercițiu calculul efectiv de verificare pentru celelalte două ecuații.

Formulele (5.9) se numesc *formulele lui Cramer* de rezolvare pentru sistemul (5.1). Ele sînt valabile numai pentru sistemele (5.1) pentru care *determinantul*

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

este diferit de zero.

Vom discuta ulterior sistemele pentru care $D = 0$.

Ca și în cazul sistemelor de două ecuații cu două necunoscute, pentru a reține numerele D, D_1, D_2, D_3 care intră în formulele (5.9), vom scrie determinantul D sub forma

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

punînd între două bare verticale matricea coeficienților necunoscutelor din sistemul (5.1).

Observăm că numărul D_1 din formulele (5.9), care este același cu D_1 din formula (5.4), se deduce din D înlocuind coeficienții a_{11}, a_{21}, a_{31} (coeficienții lui x_1) cu termenii liberi b_1, b_2, b_3 din ecuațiile respective; prin urmare, cu notația adoptată, putem scrie

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

La fel putem scrie

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Exemple. a) Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= -1 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}.$$

În acest sistem matricea coeficienților este

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = 1,\ b_2 = -1,\ b_3 = 0.$$

Să calculăm numerele D, D_1, D_2, D_3:

$$D = 3 \cdot 1\,(-1) - 3 \cdot 70 - (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \cdot 7 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 5 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= -3 - 2 + 70 - 15 = 50,$$

$D_1 = 1\cdot 1\,(-1) - 1\cdot 0\cdot 7 - (-1)(-1)(-1) + (-1)\cdot 5\cdot 7 = -1 + 1 - 5\cdot 7 = -5{,}3$

$A_{12} = -[2\cdot(-1) - 0\cdot 3] = 2, \quad A_{22} = 3(-1) - 5\cdot 3 = -18, \quad A_{32} = -(3\cdot 0 - 5\cdot 2) = 10,$

$D_2 = 1\cdot 2 + (-1)(-18) = 20,$

$A_{13} = 2\cdot 7 - 1\cdot 3 = 11, \; A_{33} = -[3\cdot 7 - 3\cdot(-1)] = -24, \; A_{33} = 3\cdot 1 - (-1)\cdot 2 = 5,$

$D_3 = 1\cdot 11 + (-1)(-24) = 35.$

Prin urmare $x_1 = -\frac{35}{50}, \quad x_2 = \frac{20}{50}, \quad x_3 = \frac{35}{50}.$

Exerciţii. Să se rezolve, cu ajutorul formulelor lui Cramer, sistemele

a) $\left.\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 10 \\ 3x + y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$ b) $\left.\begin{aligned} 5x + 4y - 6z &= 3 \\ 3x + 2y - 3z &= 2 \\ 4x + 2y - 5z &= 1 \end{aligned}\right\}$

c) $\left.\begin{aligned} 6x + 3y - 2z + 1 &= 0 \\ 4x + 2y - 3z + 4 &= 0 \\ 5x + 2y - 3z + 3 &= 0 \end{aligned}\right\}$ d) $\left.\begin{aligned} 5x + 2y + 3z + 2 &= 0 \\ 2x - 2y + 5z &= 0 \\ 3x + 2z + 4y + 10 &= 0 \end{aligned}\right\}$.

§ 6. Determinanţi de ordinul al doilea. Proprietăţi

6.1. În formulele de rezolvare a sistemului

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}\right\}$$

intervine numărul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

determinantul sistemului. Acest determinant depinde numai de coeficienţii necunoscutelor sistemului, adică de matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$$

de aceea el se numeşte, mai precis, *determinantul matricei* A şi se mai notează cu simbolul $\det A$, sau $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, sau $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Este un fapt important, pus în evidenţă de teoria sistemelor de ecuaţii de gradul întîi, că unei matrice pătrate (în cazul de faţă unei matrice cu două linii şi două coloane) i se asociază un număr, determinantul său.

Altfel spus : pe mulţimea matricelor cu două linii şi două coloane este definită o funcţie determinantă, cu valori în inelul din care se iau elementele matricelor (dacă elementele matricelor sînt numere întregi, determinanţii sînt numere întregi ; dacă elementele matricelor sînt numere raţionale, determinanţii capătă valori raţionale etc.). Determinanţii matricelor cu două linii şi două coloane se numesc *determinanţi de ordinul al doilea.*

6.2. Proprietăţile determinanţilor de ordinul al doilea

1. Observăm că

$$\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Această proprietate a determinantului se enunţă astfel : *schimbînd între ele coloanele unei matrice pătrate* (de ordinul al doilea), *determinantul matricei îşi schimbă semnul.* Un alt mod de a enunţa această proprietate este următorul : *determinantul este o funcţie alternată (sau antisimetrică) de coloanele matricei.*

2. Să presupunem că elementele primei coloane a matricei A sînt sume de cîte două numere : $a_{11} = a'_{11} + a''_{11}$, $a_{21} = a'_{21} + a''_{21}$; în acest caz, spunem : coloana întîi este suma a două coloane şi scriem

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_{11} \\ a''_{21} \end{pmatrix}.$$

Observăm că

$$\det \begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (a'_{11} + a''_{11})\, a_{22} - a_{12}(a'_{21} + a''_{21}) = a'_{11}a_{22} +$$

$$+ a''_{11}a_{22} - a_{12}a'_{21} - a_{12}a''_{21} = (a'_{11}\, a_{22} - a_{12}a'_{21}) + (a''_{11}a_{22} - a_{12}a''_{21}) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a''_{11} & a_{12} \\ a''_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Calcule asemănătoare arată că putem scrie

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a'_{12} + a''_{12} \\ a_{21} & a'_{22} + a''_{22} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a''_{22} \end{pmatrix}.$$

Această proprietate se enunţă astfel: *determinantul este o funcţie aditivă de fiecare coloană* (a sa sau a matricei).

3. Observăm că, notînd cu t un număr oarecare,

$$\det \begin{pmatrix} ta_{11} & a_{12} \\ ta_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = ta_{11}a_{22} - a_{12}ta_{21} = t \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Un calcul asemănător arată că

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & ta_{12} \\ a_{21} & ta_{22} \end{pmatrix} = t \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Această proprietate se enunţă spunînd că *determinantul este o funcţie omogenă de gradul întîi de fiecare coloană* sau încă: *înmulţind elementele unei coloane cu un număr, determinantul se înmulţeşte cu acel număr*. Proprietăţile 2 şi 3 ale determinantului se exprimă dintr-o dată: *Determinantul unei matrice pătrate (de ordinul al doilea) este o funcţie liniară de fiecare dintre cele două coloane* (ale matricei). Proprietăţile (1), (2) şi (3) se enunţă astfel: *Determinantul este o funcţie alternată de coloanele matricei şi liniară în raport cu fiecare coloană.*

În sfîrşit notăm proprietatea

$$4.\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Pe scurt $\det A = \det {}^tA$ sau, în cuvinte: *determinantul unei matrice cu două linii şi două coloane A este egal cu determinantul matricei transpuse ${}^tA$.* Se mai spune şi astfel: *determinantul nu se schimbă, dacă schimbăm liniile în coloane şi coloanele în linii.*

Din această proprietate a determinantului (de ordinul al doilea) rezultă că orice propoziţie, privind determinantul unei matrice ca funcţie de coloane, rămîne adevărată dacă înlocuim cuvîntul coloană prin cuvîntul linie şi reciproc. Astfel, putem spune: *determinantul este o funcţie alternată, liniară de liniile sale.*

6.3. Determinantul produsului a două matrice.

Teoremă. *Fie*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Atunci are loc egalitatea

$$\det (AB) = \det A \det B.$$

Să punem $C = AB$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Conform definiției produsului, avem

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}, \qquad c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22},$$
$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}, \qquad c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22}.$$

Avem

$$\det (AB) = \det C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & c_{12} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} +$$
$$+ b_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & c_{12} \\ a_{22} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

Dar

$$\begin{vmatrix} a_{11} & c_{12} \\ a_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

La fel

$$\begin{vmatrix} a_{12} & c_{12} \\ a_{22} & c_{22} \end{vmatrix} = b_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = - b_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Prin urmare,

$$\det (AB) = b_{11} b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - b_{12} b_{21} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

În cuvinte, *determinantul produsului a două matrice pătrate (cu două linii și două coloane) este egal cu produsul determinanților acelor matrice.*

6.4. Se zice că matricea A este *inversabilă* sau că are *inversă* dacă există o matrice X, astfel încît să putem scrie

$$AX = XA = U, \tag{6.1}$$

U fiind matricea unitate.

Dacă A este inversabilă şi X verifică ecuaţia (6.1), X se numeşte *inversa* lui A.

Din această definiţie rezultă că matricele inversabile sînt matrice pătrate. Într-adevăr, din egalitatea $AX = U$ rezultă că numărul liniilor lui A este egal cu numărul liniilor lui U; din egalitatea $XA = U$ rezultă că numărul coloanelor lui A este egal cu numărul coloanelor lui U. Cum U este matrice pătrată, rezultă că şi A *trebuie să fie matrice pătrată.*

Această condiţie nu este suficientă pentru ca o matrice să fie inversabilă. În cazul matricelor de ordinul al doilea este uşor de stabilit condiţia necesară şi suficientă ca o matrice să fie inversabilă. Să presupunem, prin urmare, că A şi U sînt matrice de ordinul al doilea şi să considerăm determinanţii în ecuaţia (6.1):

$$\det (AX) = \det U = 1.$$

Dar $\det (AX) = \det A \cdot \det X$. Astfel, *dacă A este inversabilă,* rezultă

$$\det A \det X = 1;$$

prin urmare $\det A \neq 0$.

Reciproc, dacă A *este o matrice pătrată de ordinul al doilea şi* $\det A \neq 0$, *atunci A este inversabilă.*

Într-adevăr, fie

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Trebuie să găsim o matrice $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ astfel încît să avem

$$AX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această ecuaţie între matrice se traduce prin sistemul

$$\begin{aligned} ax + by &= 1, & az + bt &= 0, \\ cx + dy &= 0, & cz + dt &= 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

de patru ecuaţii cu patru necunoscute x, y, z, t.

Se vede că avem de fapt două sisteme de cîte două ecuaţii cu două necunoscute, al căror determinant este egal cu $\det A$, prin urmare, diferit de zero.

Rezolvînd aceste sisteme (cu regula lui Cramer), obţinem matricea X care verifică ecuaţia

$$AX = U.$$

În acelaşi mod, dacă $\det A \neq 0$, vom găsi o matrice X' care să verifice ecuaţia $X'A = U$.

Exerciţiu. Să se deducă sistemul de ecuaţii pe care trebuie să le satisfacă elementele lui X', pentru ca să avem $X'A = U$.

Dar vom avea $X'(AX) = X'U = X'$ şi $(X'A)X = UX = X$; prin urmare $X' = X'(AX) = (X'A)X = X$.

Rezultă că dacă A este inversabilă, inversa sa este *unică* şi elementele acestei inverse sînt date de ecuaţiile (6.2); această inversă se notează cu semnul A^{-1}.

Exemplu, Fie $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ecuaţiile (6.2) se scriu în acest caz

$$4x + 5y = 1, \qquad 4z + 5t = 0,$$
$$3x + 4y = 0, \qquad 3z + 4t = 1,$$

şi rezolvate ne dau $x = 4$, $y = -3$; $z = -5$, $t = 4$. Prin urmare

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(Să se verifice că $A \cdot A^{-1} = U$).

6.5. Exerciţii

1. Să se calculeze inversele următoarelor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Să se demonstreze că dacă matricea pătrată A de ordinul al doilea are determinantul nul, coloanele sale sînt formate din elemente proporţionale şi reciproc. Enunţ asemănător pentru linii.

Indicaţie. Din $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$ rezultă $ad - bc = 0$. Presupunem $bd \neq 0$ şi împărţim cu bd, obţinem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Reciproc, din această relaţie obţinem $0 = ad - bc$. Dacă

$bd = 0$ şi $b \neq 0$, rezultă $d = 0$; prin urmare $bc = ad = 0$ şi, mai departe, $c = 0$. Se poate spune şi în acest caz că a şi 0 sînt proporţionale cu b şi 0. Dacă $b = d = 0$, afirmaţia rămîne adevărată, oricare ar fi a şi c.

3. O matrice pătrată A de ordinul al doilea are două elemente egale cu $+1$ şi două elemente egale cu 0. Ce valoare poate avea determinantul lui A : 0, $+1$ sau -1 ?

4. A, B fiind matrice pătrate de ordinul al doilea, să se arate că relaţia

$$\det (AB) = \det A \det B$$

rezultă din identitatea

$$(ad - bc)(xt - yz) = (ax + by)(cz + dt) - (az + bt)(cx + dy).$$

Indicaţie. Este destul să ne referim la definiţia produsului a două matrice şi la definiţia determinantului de ordinul al doilea (să se verifice identitatea prin calcul).

§ 7. Determinanţi de ordinul al treilea

7.1. În formulele de rezolvare ale sistemului de ecuaţii (5.1) intervine numărul

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

numit determinantul sistemului. Acest număr depinde numai de coeficienţii necunoscutelor din sistem, adică numai de matricea pătrată

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

formată cu acei coeficienţi. De aceea D se numeşte, mai exact, determinantul matricei A şi se mai notează şi cu simbolurile $\det A$, sau $|A|$,

$$\text{sau } \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ sau } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

În acest paragraf vom însemna cu A o matrice pătrată de ordinul al treilea.

Observînd mai atent expresia lui D, conchidem că determinantul D al matricei A este o sumă de şase monoame : trei avînd coeficientul

$+1$ şi trei avînd coeficientul -1. Monoamele care au coeficientul $+1$ sînt : $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$ (produsul elementelor de pe diagonala principală a lui A), $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$ (produsul elementelor de pe paralela $a_{12}\, a_{23}$ la diagonala principală cu a_{31}) şi $a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$ (produsul elementelor de pe paralela $a_{21}\, a_{32}$, cealaltă paralelă la diagonala principală cu elementul a_{13}). Monoamele care au coeficientul -1 sînt : $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$ (produsul elementelor de pe a doua diagonală a lui A), $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$ (produsul elementelor de pe paralela $a_{12}\, a_{21}$ cu a doua diagonală cu elementul a_{33}) şi $a_{11}a_{23}a_{32}$ (produsul elementelor de pe cealaltă paralelă la a doua diagonală a lui A cu elementul a_{11}). Cu alte cuvinte : să considerăm matricea formată punînd alături două matrice identice cu A şi apoi suprimînd coloana a şasea, ultima :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Monoamele care au coeficientul $+1$ în $\det A$ se corespund biunivoc cu cele trei paralele la diagonala principală a lui A, fiecare dintre cele trei monoame se obţine înmulţind elementele situate pe una dintre aceste paralele (în figură sînt însemnate prin linii continue). Monoamele care au coeficientul -1 în $\det A$ se corespund biunivoc cu cele trei paralele în M la diagonala a doua a lui A ; fiecare dintre cele trei monoame se obţine înmulţind între ele elementele situate pe una dintre aceste paralele (în figură sînt linii punctate).

Aceasta este *regula lui Sarrus* de dezvoltare a determinantului matricei A.

7.2. Fie ${}^tA$ transpusa matricei A faţă de diagonala principală ; din regula lui Sarrus rezultă că

$$\det {}^tA = \det A.$$

Într-adevăr, paralelele la diagonala principală în ${}^tA$ sînt aceleaşi ca şi paralelele la diagonala principală în matricea A (prin transpunere, se schimbă între ele) şi de asemenea paralelele la diagonala a doua în ${}^tA$ sînt aceleaşi ca şi paralelele la diagonala a doua în A (prin transpunere, fiecare dintre aceste paralele se transformă în ea însăşi). Această proprietate a determinantului se mai enunţă şi astfel :

I. *Valoarea determinantului nu se schimbă dacă schimbăm coloanele în linii şi liniile în coloane.*

Determinantul D a apărut (§ 5) ca rezultat al dezvoltării expresiei (5.3)

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \qquad (7.2)$$

Această expresie se numeşte dezvoltarea lui D după prima coloană (a matricei A). Tot în cursul rezolvării sistemului (5.1) a fost întîlnită şi identitatea

$$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$$

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad (7.3)$$

care se verifică înlocuind determinanţii de ordinul al doilea cu dezvoltările lor.

Partea dreaptă din egalitatea (7.3) se numeşte dezvoltarea determinantului D după coloana a doua a matricei A.

În acelaşi loc (§ 5) a fost întîlnită şi identitatea

$$D = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$

$$= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (7.4)$$

(dezvoltarea determinantului după coloana a treia).

Observaţie. Fiecare dintre cele trei dezvoltări după coloane se scrie în acelaşi mod, uşor de memorat: se fixează o coloană; se înmulţeşte fiecare element a_{ij} al acestei coloane cu produsul dintre $(-1)^{i+j}$ şi determinantul matricei care se obţine suprimînd linia i şi coloana j din care face parte elementul a_{ij}; se adună produsele astfel obţinute.

7.3. Proprietăţi fundamentale ale funcţiei det A (în cazul determinantului de ordinul al treilea)

II. *Determinantul de ordinul al treilea este*, ca şi determinantul de ordinul al doilea, *o funcţie alternată de coloanele matricei.*

Dacă matricea B se deduce din matricea A prin schimbarea a două coloane, atunci $\det B = -\det A$. Să verificăm această afirmaţie pentru schimbarea coloanei a doua cu coloana a treia. Se poate face acest lucru calculînd $\det B$ şi comparîndu-l apoi cu $\det A$, ca şi în cazul determinanţilor de ordinul al doilea. Pentru considera-

ţiile care urmează însă, este mai convenabil să folosim dezvoltarea (7.2) a funcţiei det A după coloana întîi. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Avem, conform dezvoltării (7.2),

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

şi

$$\det B = a_{11} \begin{vmatrix} a_{23} & a_{22} \\ a_{33} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ca urmare a faptului că B se deduce din A, schimbînd între ele coloanele a doua şi a treia, dezvoltarea lui det B diferă de det A numai prin determinanţii de ordinul al doilea care figurează în această dezvoltare şi anume, determinanţii de ordinul al doilea din dezvoltarea precedentă a lui det B se obţin din determinanţii corespunzători din dezvoltarea lui det A schimbînd între ele coloanele; prin urmare, diferă de aceştia numai prin semn, pentru că determinantul de ordinul al doilea este funcţie alternată de coloane.

Astfel este demonstrat că, dacă B se deduce din A schimbînd între ele coloanele a doua şi a treia, atunci det $B = -$ det A.

Pentru schimbarea între ele a coloanelor întîi şi a doua se foloseşte dezvoltarea determinantului după coloana a treia.

În sfîrşit, pentru schimbarea coloanelor întîi şi a treia se foloseşte dezvoltarea determinantului după coloana a doua şi se conchide în acelaşi mod.

III. Să presupunem că una dintre coloanele matricei A este suma a două coloane, de exemplu

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} \\ a'_{21} \\ a'_{31} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a''_{11} \\ a''_{12} \\ a''_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} \\ a'_{21} + a''_{21} \\ a'_{21} + a''_{31} \end{pmatrix}.$$

În acest caz, considerînd dezvoltarea determinantului după prima coloană, avem,

$$\det A = (a'_{11} + (a''_{11}) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (a'_{21} + a''_{21}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (a'_{31} + a''_{31}) \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = a'_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a'_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a'_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a''_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a''_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a''_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Astfel putem scrie egalitatea

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (7.5)$$

În ipoteza că cea de a doua coloană este suma a două coloane, plecînd de la dezvoltarea determinantului după coloana a doua, obţinem un rezultat care se scrie la fel, numai că în loc de prima coloană acest rezultat priveşte coloana a doua.

De altfel, este destul să se schimbe prima coloană cu a doua în identitatea (7.5) şi să înmulţim în ambele părţi cu -1, pentru ca să deducem rezultatul pentru coloana a doua.

Un rezultat asemănător este valabil pentru coloana a treia. Această proprietate se enunţă spunînd ca şi pentru determinantul de ordinul al doilea : *determinantul de ordinul al treilea este o funcţie aditivă de fiecare coloană* (se înţelege, a sa sau a matricei A).

IV. Tot din dezvoltarea determinantului după o coloană rezultă că determinantul este o funcţie omogenă de gradul întîi de fiecare coloană :

$$t \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ta_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ta_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ta_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ta_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ta_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ta_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ta_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ta_{33} \end{vmatrix}.$$

Ca şi în cazul determinantului de ordinul al doilea, proprietăţile III şi IV se enunţă spunînd că *determinantul de ordinul al treilea este o funcţie liniară de coloanele sale* (mai bine zis de coloanele matricei).

La fel, proprietăţile II, III şi IV se enunţă dintr-o dată spunînd că *determinantul de ordinul al treilea* $\det A$ *este o funcţie liniară şi alternată de coloanele matricei* A.

7.4. Alte proprietăţi ale determinanţilor

V. *Dacă matricea* B (cu trei linii şi trei coloane) *se deduce din matricea* A *schimbînd semnele elementelor unei coloane,* atunci $\det B = -\det A$.

Astfel,

$$\det \begin{pmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Aceasta rezultă din proprietatea III a determinantului, de a fi funcţie omogenă de gradul întîi faţă de fiecare coloană, punînd acolo $t = -1$.

Această proprietate, combinată cu proprietatea de aditivitate a determinantului, ne dă

$$\det \begin{pmatrix} a'_{11} - a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} - a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} - a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a'_{11} + (-a''_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + (-a''_{21}) & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + (-a''_{31}) & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Analog pentru celelalte coloane.

În cuvinte : *dacă o coloană a matricei* A *este egală cu diferenţa a două coloane, atunci* $\det A = \det A' - \det A''$, *unde* A' *este matricea care se deduce din* A *înlocuind coloana diferenţă cu coloana descăzut, iar matricea* A'' *se deduce din* A *înlocuind coloana diferenţă cu coloana scăzător.*

În particular, punînd în relaţiile precedente $a'_{i1} = a''_{i1} = a_{i1}$, deducem

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

VI. În cuvinte : *dacă matricea* A (cu trei linii şi trei coloane) *are o coloană nulă* (formată din elemente nule), *atunci* $\det A = 0$. Aceas-

tă proprietate rezultă de asemenea din proprietatea III a determinantului, punînd acolo $t = 0$ (şi, încă mai direct, din dezvoltarea determinantului după o coloană).

VII. *Dacă matricea A are două coloane identice, atunci* $\det A = 0$.

Într-adevăr, schimbînd între ele cele două coloane, se obţine o matrice B egală cu A, pe de o parte, iar pe de alta, avem $\det B = -\det A$ din cauza proprietăţii I a determinantului de a fi funcţie alternată. Prin urmare, în acest caz, $\det A = \det B = -\det A$, de unde $2 \det A = 0$, $\det A = 0$.

Mai general, avem proprietatea

VIII. *Dacă două coloane ale matricei A au elementele proporţionale, atunci* $\det A = 0$.

Să presupunem că

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}} = t.$$

Avem

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} ta_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ta_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ta_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= t \cdot 0 = 0.$$

IX. Şi mai general, să presupunem că $a_{i1} = sa_{i2} + ta_{i3}$ pentru $i = 1, 2, 3$, atunci

$$\det A = s \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + t \det \begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0.$$

Această proprietate se enunţă spunînd că *dacă matricea A are o coloană egală cu o combinaţie liniară de celelalte două, atunci* $\det A = 0$.

Din proprietatea VII, combinată cu proprietăţile III şi IV, rezultă că *dacă matricea B se obţine din matricea A* (cu trei linii şi trei coloane), *adunînd la una dintre coloanele lui A altă coloană a acestei matrice înmulţită cu un număr, atunci* $\det B = \det A$.

De exemplu :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + ta_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ta_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ta_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ t \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

X. Aplicînd încă o dată această proprietate, obţinem

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} + ta_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ta_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ta_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} + ta_{12} + ua_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ta_{22} + ua_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ta_{32} + ua_{33} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Acest rezultat se enunţă astfel :

Dacă la una dintre coloanele matricei A se adună o combinaţie liniară de celelalte două coloane, determinantul matricei nu se schimbă.

Această proprietate are drept corolar imediat proprietatea

XI. *Dacă una dintre coloanele matricei A este o combinaţie liniară de celelalte două coloane, atunci* $\det A = 0$.

Într-adevăr, dacă există două numere x şi y astfel încît să putem scrie $a_{i1} = a_{i2}x + a_{i3}y$ $(i = 1, 2, 3)$, atunci avem

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}x - a_{13}y & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - a_{22}x - a_{23}y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - a_{32}x - a_{33}y & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Este important de observat că are loc şi proprietatea reciprocă :

XII. *Dacă* $\det A = 0$, *atunci una dintre coloanele matricei A este o combinaţie liniară de celelalte două.*

Într-adevăr, să presupunem că avem

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă toţi determinanţii matricelor pătrate de ordinul al doilea care se obţin din A, suprimînd ultima coloană şi, pe rînd, cîte una dintre cele trei linii, sînt nuli, avem (v. ex. 2, p. 41)

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}} = s$$

şi afirmaţia este demonstrată (în acest caz $x = s$, $y = 0$). Să presupunem că unul dintre aceşti determinanţi este diferit de zero, de exemplu $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

În acest caz, sistemul de ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y &= a_{23} \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

este un sistem Cramer şi are o soluţie unică x, y. Astfel putem scrie

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} - a_{11}x - a_{12}y \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} - a_{21}x - a_{22}y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_{31}x - a_{32}y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - a_{31}x - a_{32}y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (a_{33} - a_{31}x - a_{32}y).$$

Aceasta cere egalitatea $a_{33} - a_{31}x - a_{32}y = 0$ (produsul este nul şi factorul care figurează sub formă de determinant este nenul). Prin urmare, putem scrie şi

$$a_{31}x + a_{32}y = a_{33},$$

egalitate care împreună cu sistemul (7.6) ne arată că ultima coloană este o combinaţie liniară de primele două şi afirmaţia rezultă demonstrată pe deplin.

Ca şi în cazul determinanţilor de ordinul al doilea, *orice propoziţie privind determinantul de ordinul al treilea ca funcţie de coloanele*

matricei A rămîne adevărată dacă înlocuim peste tot cuvîntul coloană cu cuvîntul linie, pentru că $\det {}^tA = \det A$.

Astfel putem spune : $\det A$ *este o funcţie liniară alternată de liniile lui* A ; putem vorbi de *dezvoltarea* $\det A$ *după una dintre liniile lui* A ş.a.

Exerciţiu. Să se enunţe toate proprietăţile determinanţilor de ordinul al treilea demonstrate mai înainte, înlocuind termenul *coloană* cu termenul *linie*.

7.5. **Aplicaţie.** Definiţia şi proprietăţile determinantului de ordinul al treilea au apărut în legătură cu rezolvarea sistemului general de trei ecuaţii de gradul întîi cu trei necunoscute.

Acum putem aplica teoria determinanţilor de ordinul al treilea, expusă mai înainte, la rezolvarea sistemelor de trei ecuaţii de gradul întîi cu trei necunoscute. Fie

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Să notăm cu A matricea coeficienţilor acestui sistem şi să punem $D = \det A$.

Putem scrie

$$Dx_1 = \det \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$$

prin urmare, avem

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}.$$

La fel obţinem formulele pentru x_2, x_3, adică formulele lui Cramer :

$$x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{D_2}{D},$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{D_3}{D}.$$

Verificarea soluţiei se face înlocuind pe x_1, x_2, x_3 cu valorile lor date de formulele lui Cramer în sistemul (7.7) :

$$D\,(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = a_{11}\left(b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right) + a_{12}\left(-b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\right) + a_{13}\left(b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right) =$$

$$= b_1\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) -$$

$$- b_2\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\right) +$$

$$+ b_3\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right).$$

Se vede că în expresia obţinută b_1 înmulţeşte dezvoltarea lui det A după prima linie, iar b_2 şi b_3 înmulţesc, fiecare, cîte o paranteză nulă [b_2 înmulţeşte rezultatul înlocuirii liniei a doua cu prima linie în det A etc.]. Astfel avem $D(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) = b_1D$, adică $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$; la fel se verifică şi celelalte două ecuaţii.

7.6. Exerciţii

1. Să se calculeze determinanţii matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{pmatrix}.$$

Indicație. Primii trei determinanți și det G se vor calcula cu regula lui Sarrus; det E se va dezvolta după linia a doua; det F după coloana a doua.

2. Să se calculeze

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \cos A & \sin A \cos B & \sin A \sin B \\ -\sin A & \cos A \cos B & \cos A \sin B \\ 0 & -\sin B & \cos B \end{vmatrix}.$$

Indicație. Se va scrie D_2 ca o sumă de determinanți observînd că putem scrie

$$\begin{pmatrix} a^2+1 \\ ab \\ ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

și la fel pentru coloana a doua, se găsește $D_2 = 1 + a^2 + b^2 + c^2$; D_3 se dezvoltă după prima coloană, se găsește $D_3 = 1$.

3. Să se arate că dacă

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos A & \cos B \\ \cos A & 1 & \cos C \\ \cos B & \cos C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos A & \cos B \\ \cos A & 0 & \cos C \\ \cos B & \cos C & 0 \end{vmatrix},$$

atunci $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ și reciproc. (Se dezvoltă cei doi determinanți.)

4. Dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi iar A unghiul opus laturii a, atunci

$$\begin{vmatrix} a^2 & b \sin A & c \sin A \\ b \sin A & 1 & \cos A \\ c \sin A & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Să se calculeze determinanții matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ \bar{a} & 1 & c \\ \bar{b} & \bar{c} & 1 \end{pmatrix}$$

în care $i = \sqrt{-1}$, a, b, c sînt numere complexe, iar $\bar{x}$ înseamnă conjugatul lui x.

6. Să se arate că dacă elementele unei matrice pătrate A de ordinul al treilea sînt numere întregi impare, atunci $\det A$ este un număr par.

Indicație. Se va observa că, în ipoteza din enunț, toți cei șase termeni din dezvoltarea lui $\det A$ sînt numere impare.

7. Fie A o matrice pătrată de ordinul al treilea, ale cărei elemente sînt toate egale cu ± 1. Care este valoarea maximă a numărului $\det A$?

Indicație. Se va observa că produsul celor șase termeni din dezvoltarea lui $\det A$ este -1; prin urmare, nu pot fi toți egali cu $+1$; deci $\det A \neq 6$; $\det A \neq 5$ (v. ex. 6). Se va observa că adunînd sau scăzînd din prima linie a matricei A una din celelalte două, obținem o matrice de forma

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

cu a, b, c, a', b', c' egale cu ± 1.

Punînd $\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, obținem $\max \det A = 4$, de exemplu pentru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Fie A o matrice pătrată de ordinul al treilea, ale cărei elemente sînt egale cu 1 sau cu 0. Care este valoarea maximă a lui $\det A$?

Indicație. Observăm că putem presupune că în fiecare linie și în fiecare coloană cel puțin un element este nul. Dacă în vreuna din coloane ar fi două elemente nule, atunci ar fi $\det A \leqslant 1$. Avem

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 = \max \det A.$$

9. Plecînd de la dezvoltarea determinantului de ordinul al treilea după regula lui Sarrus, să se demonstreze proprietatea I a determinanţilor şi anume : det A este o funcţie alternată de liniile matricei A.

Indicaţie. Se va observa că, schimbînd între ele două linii ale matricei M(v. p. 43), termenii de pe liniile continue se schimbă cu termenii de pe liniile punctate din acea matrice.

10. Aceeaşi problemă pentru proprietatea III a determinantului şi anume : să se demonstreze că determinantul este o funcţie aditivă de fiecare linie. Se va observa că, înlocuind în matricea M (v. p. 43) elementele a_{1i} (ale primei linii, pentru a fixa ideile) cu sume $a'_{1i} + a''_{1i}$, toţi termenii dezvoltării determinantului, atît cei corespunzători liniilor continue, cît şi cei corespunzători liniilor punctate se dublează şi se obţine teorema.

11. Aceeaşi problemă pentru proprietatea IV (det A este o funcţie omogenă de gradul întîi de liniile lui A).

Indicaţie. Înmulţind cu t elementele primei linii din A, toţi termenii dezvoltării determinantului, şi cei de pe liniile continue şi cei pe pe liniile punctate, se înmulţesc cu t.

12. Determinanţii

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

sînt polinoame în x, y, z; să se arate că primul îl divide pe al doilea.

Indicaţie. Se adună, în al doilea determinant, linia a doua şi a treia la prima linie şi se foloseşte proprietatea IV.

13. Folosind proprietăţile determinanţilor, să se deducă valorile următorilor determinanţi :

$$d_1 = \begin{vmatrix} \sin^2 A & 1 & \cos^2 A \\ \sin^2 B & 1 & \cos^2 B \\ \sin^2 C & 1 & \cos^2 C \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} \sin^2 A & \cos 2A & \cos^2 A \\ \sin^2 B & \cos 2B & \cos^2 B \\ \sin^2 C & \cos 2C & \cos^2 C \end{vmatrix},$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} (a_1 + a_2)^2 & a_1^2 + a_2^2 & a_1 a_2 \\ (b_1 + b_2)^2 & b_1^2 + b_2^2 & b_1 b_2 \\ (c_1 + c_2)^2 & c_1^2 + c_2^2 & c_1 c_2 \end{vmatrix}, \quad d_4 = \begin{vmatrix} \sin A & \cos A & \sin (A+D) \\ \sin B & \cos B & \sin (B+D) \\ \sin C & \cos C & \sin (C+D) \end{vmatrix}.$$

14. Să se arate că determinantul

$$\begin{vmatrix} a & \bar{a} & x \\ b & \bar{b} & y \\ c & \bar{c} & z \end{vmatrix},$$

în care a, b, c sînt numere complexe, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ înseamnă conjugatele lor respective iar x, y, z sînt variabile, este un polinom omogen şi de gradul întîi în x, y, z, cu coeficienţi pur imaginari, adică de forma $i(Ax + By + Cz)$ cu A, B, C reali.

Indicaţie. Se observă că trecerea la conjugat are drept efect schimbarea de semn a determinantului.

15. Să se demonstreze identităţile :

$$\text{(I)} \quad \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Indicaţie. Se scade din prima coloană cea de-a doua înmulţită cu x.

$$\text{(II)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)\,(c-a)\,(c-b)\,.$$

Indicaţie. Se scade prima linie din cea de-a doua şi din a treia linie.

$$\text{(III)} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b - a)\,(c - a)\,(c - b).$$

Aceeaşi indicaţie ca la (II).

$$\text{(IV)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a + b + c)\,(b - a)\,(c - a)\,(c - b).$$

$$\text{(V)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab + ac + bc)\,(b - a)\,(c - a)\,(c - b).$$

$$\text{(VI)} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^4 & b^4 & c^4 \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b).$$

16. Fie întregii pozitivi a, b, c; să se arate că

$$\begin{vmatrix} t^a & t^b & t^c \\ at^{a-1} & bt^{b-1} & ct^{c-1} \\ a(a-1)t^{a-2} & b(b-1)t^{b-2} & c(c-1)t^{c-2} \end{vmatrix} =$$

$$= t^{a+b+c-3}(b-a)(c-a)(c-b).$$

17. Să se rezolve, cu ajutorul determinanților, următoarele sisteme de ecuații:

$$(S_1)\quad \begin{aligned} 2x+3y+5z &= 10,\\ 3x+7y+4z &= 3,\\ x+2y+2z &= 3, \end{aligned} \qquad (S_2)\quad \begin{aligned} 5x-6y+4z &= 3,\\ 3x-3y+2z &= 2,\\ 4x-5y+2z &= 1, \end{aligned}$$

$$(S_3)\quad \begin{aligned} 4x-3y+2z+4 &= 0,\\ 6x+3z-2y+1 &= 0,\\ 5x-3y+2z+3 &= 0, \end{aligned} \qquad (S_4)\quad \begin{aligned} 5x+2y+3z+2 &= 0,\\ 2x+5z-2y &= 0,\\ 3x+2z+4y+10 &= 0. \end{aligned}$$

18. Care dintre sistemele următoare este determinat? Care este nedeterminat? Care este incompatibil?

$$(T_1)\quad \begin{aligned} 3x-2y+z &= 2,\\ 3x-5y+5z &= 3,\\ 6x-7y+6z &= 5, \end{aligned} \qquad (T_2)\quad \begin{aligned} 4x+3y+2z &= 1,\\ x+3y+5z &= 1,\\ 3x+6y+9z &= 2, \end{aligned}$$

$$(T_3)\quad \begin{aligned} 6y-5y+2z &= 4,\\ 2x-4y-3z &= 3,\\ 4x-y+5z &= 7, \end{aligned} \qquad (T_4)\quad \begin{aligned} 3x-2y+4z &= 3,\\ 2x+y+5z &= 2,\\ 7x-14y &= 10. \end{aligned}$$

R. (T_1) nedeterminat, (T_2) nedeterminat; (T_3) și (T_4) incompatibile.

19. Să se discute și să se rezolve, în caz de compatibilitate, sistemele:

$$(s_1)\quad \begin{aligned} 2ax-23y+29z &= 4,\\ 7x+ay+4z &= 7,\\ 5x+2y+az &= 5. \end{aligned}$$

R. Determinantul matricei coeficienților este $2(a^3 - 27)$; dacă $a^3 - 27 \neq 0$, sistemul este compatibil, altfel este incompatibil.

$$(s_2)\quad \begin{aligned} ax - 3y + 5z &= 4,\\ x - ay + 3z &= 2,\\ 9x - 7y + 8az &= 0. \end{aligned}$$

R. Determinantul matricei coeficienților este $-2(4a^3 - 45a + 58)$; pentru $4a^3 - 45a + 58 = 0$, sistemul este incompatibil; altfel, este compatibil.

$$(s_3)\quad \begin{aligned} ax + 4y + z &= 0,\\ 2y + 3z - 1 &= 0,\\ 3x - bz + 2 &= 0. \end{aligned}$$

R. Determinantul coeficienților este

$$\begin{vmatrix} a & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -b \end{vmatrix} = -2ab + 36 - 6 = -2(ab - 15);$$

pentru $ab \neq 15$ sistemul este determinat. Rezultatul eliminării necunoscutelor y și z din sistem se scrie

$$-2(ab - 15)x = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -b \end{vmatrix} = -24 + 4 + 4b = -20 + 4b$$

adică

$$(ab - 15)x = 2(5 - b).$$

Pentru $b = 5$, $a = 3$, sistemul

$$\begin{aligned} 3x + 4y + z &= 0,\\ 2y + 3z &= 1,\\ 3x - 5z &= -2 \end{aligned}$$

este nedeterminat. Pentru $ab - 15 = 0$, $b \neq 5$, sistemul este incompatibil.

§ 8. Permutări

8.1. Amintim că o aplicație biunivocă p a unei mulțimi finite M în ea însăși se numește *permutare* a mulțimii M. Observăm, că aplicația fiind biunivocă, duce elemente distincte în elemente distincte;

prin urmare, mulțimea $p(M)$ are tot atîtea elemente cîte are și M; cum $p(M) \subset M$, rezultă că $p(M)$ coincide cu M, astfel încît aplicația p duce mulțimea M pe ea însăși.

Exemple. 1. Spunem că matricea $B = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ se deduce din matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ prin permutarea liniilor; în acest caz, mulțimea M este formată din cele două linii ale matricei A. De asemenea, matricea

$$Y = \begin{pmatrix} x_{12} & x_{11} & x_{13} \\ x_{22} & x_{21} & x_{23} \\ x_{32} & x_{31} & x_{33} \end{pmatrix}$$

se deduce din matricea

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

prin permutarea coloanelor; în acest caz, mulțimea M este formată din coloanele matricei X.

2. Să presupunem că într-un cerc Γ este înscris un pătrat $ABCD$ și că executăm o rotație de 90° a cercului Γ (v. fig. 1) astfel încît vîrful A să vină în B, B în C, C în D și D în A; spunem că mulțimea vîrfurilor pătratului a suferit o permutare p și anume avem $p(A) = B$, $p(B) = C$, $p(C) = D$, $p(D) = A$.

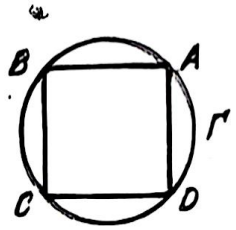


Fig. 1

De obicei, obiectele mulțimii M se notează cu numerele 1, 2, ..., n. Astfel am putea numi vîrfurile pătratului din exemplul precedent A_1, A_2, A_3, A_4, sau, mai pe scurt 1, 2, 3, 4. În felul acesta, putem spune că obiectele lui M sînt numerele 1, 2, ..., n. Se spune obiectul nr. 1, sau obiectul 1, sau, mai simplu, 1. De exemplu, astfel se numerotează jucătorii unei echipe.

Permutarea p asociază obiectului 1 un obiect $p(1)$ din M; obiectului 2 un obiect $p(2)$ din aceeași mulțime; ...; obiectului n un obiect $p(n)$.

Exprimăm acest fapt scriind $m \to p(m)$, [se citește: m merge în $p(m)$ sau lui m îi corespunde $p(m)$], $m = 1, 2, \ldots, n$.

Un alt mod de a scrie aceeași permutare este

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix}$$

[se citește: 1 merge în $p(1)$; 2 în $p(2)$, ..., n în $p(n)$].

Exemple. Permutările mulțimii

$M_2 = \{1, 2\}$ sînt $I_{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (permutarea identică) și $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $t(1) = 2$, $t(2) = 1$.

Permutările mulțimii $M_3 = \{1, 2, 3\}$ sînt $I_{M_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (permutarea identică),

$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (permutările circulare) și $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ (cele trei transpoziții).

Definiție. Două permutări p și q ale mulțimii M se numesc *egale* dacă $p(i) = q(i)$ pentru orice $i \in M$.

Exemple. Fie $M = \{1, 2, 3\}$, p $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Permutările p și q sînt egale, pentru că $p(1) = 3 = q(1)$, $p(2) = 1 = q(2)$, $p(3) = 2 = q(3)$. Permutările p și r sînt diferite pentru că $p(1) = 3 \neq r(1)$.

8.2. **Compunerea permutărilor.** Permutările unei mulțimi M se compun întocmai ca și aplicațiile lui M în ea însăși. Astfel, p și q fiind două permutări ale lui M, rezultatul compunerii lui p cu q sau produsul $q \circ p$ este permutarea $i \to q(p(i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplu. Fie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; avem $(q \circ p)(1) = q(p(1)) = q(2) = 1$, $(q \circ p)(2) = q(p(2)) = q(3)$; $(q \circ p)(3) = q(p(3)) = q(1) = 2$.

Prin urmare $q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. La fel $p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Observăm că $p \circ q \neq q \circ p$; *compunerea permutărilor nu este*, în general, *comutativă*. Dacă

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix} \text{ și } q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ q(1) & q(2) & \ldots & q(n) \end{pmatrix},$$

produsul $q \circ p$ se mai scrie și astfel :

$$q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p(1) & p(2) & \ldots & p(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ q(1) & q(2) & \ldots & q(n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \\ q(p(1)) & q(p(2)) & \dots & q(p(n)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q(p(1)) & q(p(2)) & \dots & q(p(n)) \end{pmatrix}.$$

Exemplu. Fie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

rezultă

$$q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.2.1. *Proprietăţile compunerii permutărilor*

1. Compunerea permutărilor este asociativă. Într-adevăr, fie p, q, r trei permutări ale mulţimii $M = \{1, 2, ..., n\}$. Putem scrie $(r \circ (q \circ p))\ (i) = (r \circ (q \circ p))\ (i) = r \circ (q\,(p(i)) = (r \circ q)\ (p\,(i)) =$ $= ((r \circ q) \circ p)(i)$, pentru orice $i \in M$; prin urmare $r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p$.

2. Permutarea identică $I_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ verifică relaţia $p \circ I_M =$ $= I_M \circ p$, pentru orice permutare p a lui M: $(p \circ I_M)\ (i) =$ $= p(I_M\,(i)) = p(i) = I_M(p(i)) = (I_M \circ p)\,(i)$, pentru orice $i \in M$.

3. Întrucît o permutare a mulţimii M este o aplicaţie biunivocă a lui M pe ea însăşi, pentru fiecare permutare p a lui M există o *permutare inversă* $p^{-1}: M \to M$. Anume, dacă $y \in M$, $p^{-1}(y)$ este acel element $x \in M$, pentru care $p(x) = y$, [x exista, căci $p(M) = M$].

Astfel, dacă prin permutarea p, $x \to p(x) = y$, prin p^{-1}, $y \to p^{-1}(y) =$ $= p^{-1}(p(x)) = x$.

În cealaltă scriere: dacă

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}, \text{ atunci } p^{-1} = \begin{pmatrix} p(1) & p(2) & \dots & p(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Exemplu. Dacă $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $p^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Astfel $p\,(2) = 3$, pe cînd $p^{-1}(3) = 2$, $p^{-1}\,(2) = 1$.

Din însuşi modul în care a fost definită, rezultă că p^{-1} este o permutare a lui M, adică este biunivocă.

Într-adevăr, fie y şi z două elemente ale lui M astfel, încît să avem

$$p^{-1}(y) = p^{-1}(z) = x.$$

Aceasta înseamnă că $y = p(x) = z$; prin urmare, p^{-1} duce elemente distincte în elemente distincte.

De asemenea, din faptul că, prin definiția lui p^{-1}, $y = p(x)$ este totuna cu $x = p^{-1}(y)$, rezultă $(p \circ p^{-1})(y) = p(p^{-1}(y)) = p(x) = y$ pentru orice $y \in M$, adică $p \circ p^{-1}$ este permutarea identică I_M a mulțimii M.

La fel $(p^{-1} \circ p)(x) = p^{-1}(p(x)) = p^{-1}(y) = x$ pentru orice $x \in M$, adică $p^{-1} \circ p = I_M$. Aceasta înseamnă că dacă p^{-1} este inversa lui p, permutarea p este inversa lui p^{-1}.

Astfel, în exemplul precedent

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad p^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(p^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = p.$$

Faptul că în mulțimea permutărilor lui M este definită o lege de compunere cu proprietățile 1, 2 și 3 se exprimă astfel: *permutările lui M formează grup*; se notează acest grup cu simbolul σ_M sau σ_n.

Astfel grupul σ_2 este format din permutările $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

σ_3 este format din permutările

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8.3. Exerciții

1. Să se calculeze produsul $q \circ p$, unde

a) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

b) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$

c) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$

d) $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$

R. a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze permutările $p^2 = p \circ p$, $p \circ q \circ p$, în fiecare dintre cazurile a), ..., d) din exercițiul precedent.

R. p^2; a) I_3, b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&1&3&2&5\end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&3&5&2\end{pmatrix}$.

$p \circ q \circ p$: a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&4&3&1\end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}$.

3. Să se scrie permutarea q^{-1} în fiecare dintre cazurile a), ..., d) din exercițiul 1.

R. a) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&2&3&1\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&1&2&4\end{pmatrix}$.

4. Să se scrie cele 24 de permutări ale mulțimii $M_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Indicație. Se vor scrie întîi permutările p_i^4, pentru care $p_i^4(4) = 4$. Acestea induc pe mulțimea $M_3 = \{1, 2, 3\}$ cele șase permutări ale acestei mulțimi. Prin urmare, vom avea șase permutări p_i^4, $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, pentru care $p_i^4(4) = 4$. De exemplu: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$. Se vor scrie apoi permutările p_i^3 pentru care $p_i^3(4) = 3$. Fiecare dintre aceste permutări induce o aplicație biunivocă a mulțimii $\{1, 2, 3\}$ pe mulțimea $\{1, 2, 4\}$. Sînt șase la număr; exemplu: $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$. Apoi se vor scrie permutările p_i^2, pentru care $p_i^2(4) = 2$, (tot șase la număr) și în sfîrșit permutările p_i^1, pentru care $p_i^1(4) = 1$.

8.4. **Transpoziții.** O permutare t a mulțimii $M = \{1, 2, ..., n\}$ se numește *transpoziție*, dacă între obiectele 1, 2, ..., n există unul i, astfel încît să avem $t(h) = h$ pentru $h \neq i$, $h \neq i + 1$, $h \in M$ și $t(i) = i + 1, t(i + 1) = i$.

Altfel spus, o transpoziție este orice permutare de forma

$$t = \begin{pmatrix}1&2&\dots&i-1&i&i+1&i+2&\dots&n\\1&2&\dots&i-1&i+1&i&i+2&\dots&n\end{pmatrix}.$$

Adesea o transpoziţie se notează cu simbolul $(i, i+1)$ şi se numeşte *transpoziţia care schimbă pe i cu $i+1$.*

Exemple. Permutarea $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1, 2)$ este transpoziţia care schimbă pe 1 cu 2; permutarea $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ este transpoziţia care schimbă pe 2 cu 3.

Permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ nu este transpoziţie; nici permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nu este transpoziţie, după definiţia de mai sus.

Observăm, că dacă t este transpoziţie a mulţimii M^i permutarea inversă t^{-1} coincide cu t.

Exemplu. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Să considerăm o permutare $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix}$ care are proprietatea că $p(n) = n$.

Să notăm cu M mulţimea $\{1, 2, \dots, n\}$ şi cu M^i mulţimea $\{1, 2, \dots, n-1\}$.

Permutarea p duce elementele mulţimii M' tot în M', astfel încît rezultă definită o permutare $p' : M' \to M'$, prin formulele $p'(1) = p(1), \dots, p'(n-1) = p(n-1)$. Permutarea p' se numeşte *restricţia* lui p la M'.

În sens invers, fiecare permutare q' a mulţimii M' *se poate prelungi* pînă la o permutare q a mulţimii M definită prin formulele

$$q(x) = q'(x) \text{ dacă } x \in M' \text{ şi } q(n) = n.$$

Dacă q' şi r' sînt permutări ale lui M' şi dacă q şi r sînt prelungirile lor la M, atunci, pentru orice $x \in M$, putem scrie

$$(r' \circ q')(x) = r'(q'(x)) = r(q(x)) = (r \circ q)(x).$$

În cele ce urmează, ne va fi utilă următoarea

Teoremă. *Orice permutare a mulţimii $M_n = \{1, 2, \dots, n\}$ se poate scrie ca produs de transpoziţii.* Demonstraţia acestei teoreme se face prin inducţie asupra lui n. Teorema este adevărată pentru $n=2$, căci mulţimea M_2 admite numai permutarea identică $I_{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ şi transpoziţa $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1, 2)$. Putem scrie $I_{M_2} = (1, 2)(1, 2)$.

Să presupunem că teorema este adevărată pentru permutările mulțimii M_{n-1} cu $n > 2$.

Fie p o permutare a mulțimii M_n. Se pot întîmpla două cazuri: $p(n) = n$ sau $p(n) \neq n$.

Să considerăm mai întîi cazul $p(n) = n$, notînd cu p' restricția permutării p la mulțimea M_{n-1}. Prin ipoteza de inducție, teorema este adevărată pentru permutarea p'; prin urmare, putem scrie

$$p' = t'_1 \circ \ldots \circ t'_a,$$

cu $t'_1, \ldots, t'_a$ transpoziții ale mulțimii M_{n-1}.

Să notăm cu t_h permutarea care se deduce din t'_h prin prelungire la M_n ($h = 1, 2, \ldots, a$). Observăm că t_h este tot o transpoziție: dacă $t'_h = (i, i+1)$, cu $i \leqslant n-2$, atunci $t_h = (i, i+1)$. Putem scrie pentru orice $x \in M_{n-1}$, $p(x) = p'(x) = (t'_1 \circ \ldots \circ t'_a)(x) = (t_1 \circ \ldots \circ t_a)(x)$ și $p(n) = n = (t_1 \circ \ldots \circ t_a)(n)$, deoarece $t_a(n) = \ldots = t_1(n) = n$. Astfel $p = t_1 \circ \ldots \circ t_a$. Prin urmare, teorema este demonstrată în cazul $p(n) = n$.

Să presupunem acum că $p(n) = m \neq n$,

$$p = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ p(1) & \ldots & p(n-1) & m \end{pmatrix}.$$

În acest caz, raționăm în modul următor: considerăm permutarea $q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ p(1) & \ldots & p(n-1) & m \end{pmatrix} (m, m+1) \ldots (n-1, n)$, în care am notat cu $(i, i+1)$ transpoziția care schimbă pe i cu $i+1$. Avem

$$q(n) = n, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ q(1) & \ldots & q(n-1) & n \end{pmatrix}.$$

Să compunem ambele părți ale egalității

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ q(1) & \ldots & q(n-1) & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ p(1) & \ldots & p(n-1) & p(n) \end{pmatrix} (m, m+1) \ldots (n-1, n),$$

la dreapta, cu produsul $(n-1, n) \ldots (m, m+1)$ și să observăm că produsul $(m, m+1) \ldots (n-1, n)\ (n-1, n) \ldots (m, m+1)$ este permutarea identică; deducem

$$\begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ q(1) & \ldots & q(n-1) & n \end{pmatrix} (n-1, n) \ldots (m, m+1) = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ p(1) & \ldots & p(n) \end{pmatrix} = p.$$

Dar, conform celor arătate în prima parte a demonstrației, permutarea

$$q = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n-1 & n \\ q(1) & \ldots & q(n-1) & n \end{pmatrix}$$

este un produs de transpoziţii ; rezultă că p este un produs de transpoziţii. Am arătat în acest mod că dacă teorema este adevărată pentru mulţimile M_{n-1}, ea este adevărată şi pentru M_n. Deoarece teorema este adevărată pentru M_2, ea este adevărată pentru M_3, M_4 etc. pentru orice mulţime finită.

Exemple. 1. Fie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. În acest caz, $n = 3$, $p(3) = m = 1$.

Compunînd, ca în partea a doua a demonstraţiei, permutarea p cu produsul $(m, m+1)...(n-1, n) = (1, 2)\,(2, 3)$, obţinem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (1, 2)\,(2, 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Compunînd, tot ca în partea a doua a demonstraţiei, la dreapta cu $(2, 3)\,(1, 2)$, în ambele părţi ale semnului de egalitate, deducem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (2, 3)\,(1, 2).$$

2. Fie $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Procedînd ca mai înainte, avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} (2, 3)\,(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2, 3);$$

prin urmare,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2, 3)\,(1, 2)\,(2, 3).$$

3. Fie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$.

O astfel de *permutare* se numeşte *ciclică de ordinul n.*
Avem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} (1, 2)(2, 3) \dots (n-1, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

Rezultă, ca şi în exemplul 1,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (n-1, n)\,(n-2, n-1) \dots (1, 2).$$

8.4.1. Exerciţii

Să se scrie ca produs de transpoziţii fiecare dintre permutările

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad q^2, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad r^2.$$

R. $p = (1, 2)\ (2, 3)$, $q = (3, 4)\ (2, 3)\ (1, 2)$, $q^2 = (1, 3)\ (2, 4)$,

$$r = (4, 5)\ (3, 4)\ (2, 3)\ (1, 2);\quad r^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}(2, 3)\ (3, 4)\ (1, 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = q;$$

$$r^2 = (3, 4)\ (2, 3)\ (1, 2)\ (4, 5)\ (3, 4)\ (2, 3).$$

8.5. **Paritatea unei permutări.** Fie p o permutare a mulțimii $M = \{1, 2, \ldots, n\}$. Să considerăm cîtul

$$\frac{p(i) - p(j)}{i - j}, \quad (i, j \in M,\ i \neq j).$$

Dacă acest cît este un număr negativ, zicem că permutarea p prezintă o *inversiune* în privința numerelor i și j; dacă acest cît este pozitiv, zicem că p nu prezintă nici-o inversiune în privința acestor numere.

Astfel, permutarea $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ prezintă o inversiune în privința perechii (1, 2), în privința perechii (1, 3) nu prezintă inversiune: $\dfrac{p(1) - p(3)}{1 - 3} = \dfrac{2 - 3}{1 - 3} > 0.$

Observăm că

$$\frac{p(i) - p(j)}{i - j} = \frac{p(j) - p(i)}{j - i}.$$

Să considerăm produsul de C_n^2 fracții:

$$\varepsilon(p) = \frac{p(1) - p(2)}{1 - 2} \cdot \frac{p(1) - p(3)}{1 - 3} \cdots \frac{p(1) - p(n)}{1 - n} \cdot \frac{p(2) - p(3)}{2 - 3} \cdots$$

$$\cdots \frac{p(2) - p(n)}{2 - n} \cdot \frac{p(3) - p(4)}{3 - 4} \cdots \frac{p(n-1) - p(n)}{n - 1 - n}.$$

Dacă $\varepsilon(p)$ este pozitiv, numărul inversiunilor pe care le prezintă permutarea p (în privința tuturor perechilor de numere din M) este par; dacă $\varepsilon(p)$ este negativ, atunci numărul inversiunilor pe care le prezintă permutarea p este impar. În primul caz, se spune că *permutarea* p este *pară*; în al doiela caz, *impară*. Astfel transpo-

ziţia $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ este o permutare impară : $\frac{t(1)-t(2)}{1-2} = \frac{2-1}{1-2} = -1 <$

< 0; permutarea identică $n = \begin{pmatrix}1 & 2 & \dots n\\ 1 & 2 & \dots n\end{pmatrix}$ este pară, pentru că $\frac{u(i)-u(j)}{i-j} = \frac{i-j}{i-j} = +1 > 0$, pentru orice i şi j.

Teoremă. *Dacă p şi q sînt două permutări ale mulţimii $M = \{1, 2, \dots, n\}$, în acest caz are loc egalitatea $\varepsilon(q \circ p) = \varepsilon(q)\ \varepsilon(p)$.*

Demonstraţie. Observăm egalitatea

$$\frac{(q\circ p)(i)-(q\circ p)(j)}{i-j} = \frac{q(p(i))-q(p(j))}{i-j} =$$

$$= \frac{q(p(i))-q(p(j))}{p(i)-p(j)} \cdot \frac{p(i)-p(j)}{i-j}, \quad (i\ ,\ j \in M).$$

Prin urmare, putem scrie

$$\varepsilon(q\circ p) = \frac{(q\circ p)(1)-(q\circ p)(2)}{1-2} \cdot \frac{(q\circ p)(1)-(q\circ p)(3)}{1-3} \dots$$

$$\dots \frac{(q\circ p)(n-1)-(q\circ p)(n)}{n-1-n} = \frac{q(p(1))-q(p(2))}{p(1)-p(2)} \dots$$

$$\dots \frac{q(p(n-1))-q(p(n))}{p(n-1)-p(n)} \cdot \frac{p(1)-p(2)}{1-2} \dots \frac{p(n-1)-p(n)}{n-1\ -n} = a\varepsilon(p),$$

unde

$$a = \frac{q(p(1))-q(p(2))}{p(1)-p(2)} \dots \frac{q(p(n-1))-q(p(n))}{p(n-1)-p(n)}.$$

Dar mulţimea $\{p(1), \dots, p(n)\}$ este identică cu M; astfel încît putem scrie

$$a = \frac{q(p(1))-q(p(2))}{p(1)-p(2)} \dots \frac{q(p(n-1))-q(p(n))}{p(n-1)-p(n)} = \frac{q(1)-q(2)}{1-2} \dots$$

$$\dots \frac{q(n-1)-q(n)}{n-1-n} = \varepsilon(q).$$

Deducem $\varepsilon(q\circ p) = \varepsilon(q)\varepsilon(p)$.

Dacă p este o transpoziţie $(i,\ i+1)$, avem $\varepsilon(p) = -1$.

Din teorema de la p. 64 rezultă că orice permutare p se poate scrie ca produs de transpoziţii. Din teorema precedentă reiese că dacă t_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ şi t'_j $(1 \leqslant j \leqslant s')$ sînt transpoziţii astfel încît să putem scrie

$$t_1 \dots t_s = p = t'_1 \dots t'_{s'},$$

atunci $(-1)^s = \varepsilon(p) = (-1)^{s'}$. Obţinem următorul

Corolar. *Oricum am scrie o permutare p ca produs de transpoziţii, numărul transpoziţiilor care figurează ca factori, în diferitele scrieri, este par dacă permutarea p este pară, iar $\varepsilon(p) = +1$; numărul transpoziţiilor este impar şi $\varepsilon(p) = -1$ dacă permutarea p este impară. Funcţia* $\varepsilon(p)$, definită mai sus, cu valori în mulţimea $\{+1, -1\}$ se numeşte *signatura* permutării p.

Exemple. 1. Fie $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon(p) = \dfrac{2-3}{1-2}\dfrac{2-1}{1-3}\dfrac{3-1}{2-3} = +1$; această permutare este pară, ea prezentînd două inversiuni în privinţa perechilor (2, 1) şi (3, 1).

2. Permutarea $q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} = (n-1, n)\,(n-2, n-1)\dots(2, 3)\,(1, 2)$ are signatura $\varepsilon(q) = (-1)^{n-1}$; q este pară dacă n este impar şi impară dacă n este par.

8.6. Exerciţii

1. Cîte inversiuni prezintă permutarea

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}?$$

R. Avem $p(1) - p(i) = 5 - p(i) > 0$, $1 - i < 0$; prin urmare, p prezintă cîte o inversiune pentru fiecare dintre perechile $(1, i)$, $i = 2, 3, 4, 5$; $p(2) - p(j) = 1 - p(j) < 0$, $2 - j < 0$, pentru $j > 2$; p nu prezintă nici o inversiune pentru perechile $(2, j)$, $j > 2$. Pentru perechile (3, 4) şi (5, 5) permutarea prezintă inversiuni; pentru (4, 5) nu prezintă. În total permutarea p prezintă şase inversiuni.

2. Cîte inversiuni prezintă fiecare dintre permutările:

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 7 & 1 & 8 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}?$$

R. q prezintă 5 inversiuni, r prezintă 8 inversiuni şi s prezintă 21 inversiuni.

3. Să se calculeze signatura permutărilor $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, q, r, s de la exerciţiul precedent şi

$$p_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

R. Permutarea p_n prezintă $n-1+n-2+\ldots+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ inversiuni.

Astfel $\varepsilon(p_n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

4. Care dintre permutările mulțimii $M_n=\{1, 2, \ldots, n\}$ prezintă cel mai mare număr de inversiuni?

R. Permutarea p_n din exercițiul 3. Se va observa că numărul inversiunilor prezentate de perechile $(1, i)$ este cel mult $n-1$; numărul inversiunilor prezentate de perechile $(2, j)$ cu $j>2$ este cel mult $n-2$ ș. a. m. d.; permutarea p_n prezintă numărul maxim de inversiuni pentru perechile de forma $(1, j)$ ca și pentru celelalte perechi.

5. Să se calculeze signatura permutării

$$q=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n\\ 1 & 3 & 5 & \ldots & 2n-1 & 2 & 4 & \ldots & 2n\end{pmatrix},\quad n\geqslant 2.$$

R. Această permutare prezintă o inversiune pentru perechile de forma $(2, i)$, $i>2$, anume pentru $(2, n+1)$; două inversiuni pentru perechile de forma $(3, j)$, $j>3$, anume pentru $(3, n+1)$ și $(3, n+2)$; $\ldots$; $n-1$ inversiuni pentru perechile de forma (n, x), $x>n$, anume pentru toate perechile de această formă cu $x=n+1, n+2, \ldots, 2n-1$, în total $1+2+\ldots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$ inversiuni. Prin urmare, $\varepsilon(q)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

6. Să se calculeze signatura permutării

$$p=\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n & n+1 & n+2 & \ldots & 2n\\ 2 & 4 & \ldots & 2n & 1 & 3 & \ldots & 2n-1\end{pmatrix}.$$

R. $\varepsilon(p)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ [numărul inversiunilor este $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$].

§ 9. Determinanți de ordinul n

9.1. Cu ajutorul permutărilor, putem defini determinantul unei matrice pătrate arbitrare, generalizînd definiția determinanților de ordinul al doilea și al treilea. Amintim că

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Observînd termenii dezvoltării determinantului de ordinul al treilea, de exemplu, constatăm că fiecare termen este de forma $a_{1i_1}\, a_{2i_2}\, a_{3i_3}$; este produsul unui element a_{1i_1} din prima linie, cu un element a_{2i_2} din linia a doua, cu un element a_{3i_3} din linia a treia.

Mai departe, observăm că în cei doi determinanți unii termeni au coeficientul $+1$, alții -1.

Pentru a fixa coeficientul termenului $a_{1i_1}\, a_{2i_2}\, a_{3i_3}$ din dezvoltarea determinantului de ordinul al treilea, observăm că acestui termen i se asociază în mod determinat permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$. Dacă această permutare este pară, atunci termenul $a_{1i_1}\, a_{2i_2}\, a_{3i_3}$ are coeficientul $+1$; dacă permutarea este impară, coeficientul termenului este -1.

La fel în determinantul de ordinul al doilea, termenului $a_{11}a_{22}$ i se asociază permutarea identică $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, care este pară, coeficientul acestui termen fiind $+1$. Termenului $a_{12}a_{21}$ i se asociază transpoziția $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, care este impară; coeficientul acestui termen fiind -1.

În determinantul de ordinul al treilea, termenul $a_{13}a_{22}a_{31}$ are coeficientul -1 pentru că permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ este impară. Cu aceste observații putem trece la definiția determinantului unei matrice pătrate de un ordin oarecare n.

Definiție. *Se numește determinantul matricei*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

numărul

$$\det A = \sum_{\alpha \in \sigma_n} \varepsilon(\alpha)\, a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \tag{9.1}$$

unde $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ parcurge mulțimea σ_n a tuturor permutărilor mulțimii $\{1, 2, \dots n\}$; $\varepsilon(\alpha) = +1$, dacă permutarea este pară și $\varepsilon(\alpha) = -1$ dacă este o permutare impară.

Observăm că, în cazul de față, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nu sînt indici de însumare; indicele de însumare la care se referă semnul Σ este permutarea α, care parcurge mulțimea σ_n.

Exemple. 1. Cazuri particulare ale formulei (9.1) sînt formulele de definiție pentru determinanții de ordinul al doilea și al treilea.

2. Să considerăm matricea pătrată A de ordinul n, care are n elemente egale cu $+1$, iar restul de $n^2 - n$ elemente egale cu 0. Ce valori poate lua $\det A$?

Cazul I. Dacă două dintre cele n elemente egale cu $+1$ aparțin unei linii (sau unei coloane) matricea A are cel puțin o linie (respectiv o coloană) formată numai din elemente egale cu zero; prin urmare, în acest caz, fiecare termen al dezvoltării lui $\det A$ este nul, căci unul dintre factori este nul: $\det A = 0$.

Cazul II. Dacă în fiecare linie i și în fiecare coloană j există numai un element egal cu $+1$, înseamnă că pentru fiecare i există un j determinat, depinzînd de i, astfel că $a_{ij} = 1$ și $a_{ih} = 0$ pentru $h \neq j$. Ca să arătăm că j depinde de i, vom scrie $j(i)$. Deci $a_{ij(i)} = +1$, $a_{ih} = 0$, pentru $h \neq j(1)$, iar $j(1), \ldots, j(n)$ sînt diferiți între ei astfel încît $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j(1) & j(2) & \ldots & j(n) \end{pmatrix}$ este o permutare pe care o vom nota cu j.

Rezultă $\det A = \varepsilon(j) a_{1j(1)} \ldots a_{nj(n)} = \varepsilon(j)$, signatura permutării j. Adică, în cazul II, $\det A = +1$, dacă permutarea j este pară și $\det A = -1$, dacă permutarea j este impară.

Determinantul matricei A se mai notează cu simbolul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{sau} \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

9.2. Proprietățile funcției $\det A$

I. **Teoremă.** *Dacă ${}^tA$ este transpusa matricei A* (simetrica față de diagonala principală), *atunci*

$$\det ({}^tA) = \det A.$$

Într-adevăr,

$${}^tA = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

unde $b_{ij} = a_{ji}$. Prin urmare,

$$\det {}^tA = \sum_{\beta \in P_n} \varepsilon(\beta)\, b_{1\beta_1}, \ldots b_{n\beta_n} = \sum_{\beta \in P_n} \varepsilon(\beta)\, a_{\beta_1 1} \ldots a_{\beta_n n}.$$

Observăm acum următoarele: 1) Permutarea $\beta = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ \beta_1 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$ și

permutarea $\alpha = \begin{pmatrix} \beta_1 & \dots & \beta_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$ sînt inverse una alteia şi, prin urmare, $\varepsilon(\beta) = \varepsilon(\alpha)$. 2) Permutarea α se poate scrie sub forma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Aceasta corespunde faptului că, schimbînd ordinea factorilor, termenul $a_{\beta_1 1} \dots a_{\beta_n n}$ se poate scrie sub forma $a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n}$.

Exemplu. În determinantul de ordinul al treilea avem $a_{21}a_{32}a_{13} = a_{13}a_{21}a_{32}$.

3) Cînd β parcurge mulţimea tuturor permutărilor mulţimii $1, 2, \dots, n$, inversa sa parcurge aceeaşi mulţime de permutări. Prin urmare, putem scrie în continuare

$$\det {}^tA = \sum_{\beta \in P_n} \varepsilon(\beta)\, a_{\beta_1 1} \dots a_{\beta_n n} = \sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha)\, a_{1\alpha_1} \dots a_{n\alpha_n} = \det A.$$

Astfel proprietatea I este demonstrată.

Proprietăţile, care se referă la $\det A$ ca funcţie de coloanele matricei A, se pot formula, fără a mai trebui demonstrate, şi pentru liniile lui A şi reciproc.

9.2.1. Exerciţii

1. Să se scrie termenii de forma $a_{1i}a_{2j}a_{31}$ în dezvoltarea determinantului de ordinul al treilea $|a_{ij}|$, precizîndu-se semnul fiecăruia.

Indicaţie. Aceştia sînt cei doi termeni corespunzători permutărilor $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ i & j \end{pmatrix}$, adică $+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

2. Aceeaşi problemă pentru termenii de forma $a_{1i}a_{21}a_{3j}a_{43}$ în dezvoltarea determinantului $|a_{ij}|$ de ordinul al patrulea.

Indicaţie. Aceştia sînt cei doi termeni corespunzători permutărilor $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ i & j \end{pmatrix}$; se fixează i şi j şi se cercetează paritatea permutării corespunzătoare $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 1 & j & 3 \end{pmatrix}$.

3. Să se scrie termenii în forma $a_{1i}a_{21}a_{3j}a_{4k}$, care în dezvoltarea determinantului de ordinul al patrulea, au semnul $+$.

Indicaţie. Aceştia sînt termenii corespunzători permutărilor $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ pentru care permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & 1 & j & k \end{pmatrix}$ este pară. Se fixează i, de exemplu $i = 2$ şi se aleg j şi k astfel ca permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & j & k \end{pmatrix}$ să fie pară; rezultă $j = n$, $k = 3$, deci unul dintre termeni este $+ a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$. Ceilalţi doi termeni se obţin procedînd analog pentru $i = 3$ şi $i = 4$.

4. Să se justifice regula lui Sarrus pentru dezvoltarea determinantului de ordinul al treilea.

Indicație. Se va ține seama de faptul că permutările ciclice de ordinul al treilea sînt pare, iar celelalte permutări de ordinul al treilea sînt impare și se va pune acest fapt în legătură cu regula lui Sarrus.

5. Ce coeficient are termenul $a_{1n}a_{2n-1}\ldots a_{n1}$ de pe diagonala a doua în dezvoltarea determinantului de ordinul n?

R. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

6. Plecînd de la definiția determinantului, să se demonstreze că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn};$$

termenii situați deasupra diagonalei principale se presupun toți nuli.

Indicație. Se va observa că în fiecare termen din dezvoltarea determinantului figurează ca factor un singur element din prima linie și un singur element din prima coloană; dacă aceste elemente sînt diferite de a_{11}, termenul este nul. Se raționează în continuare pentru linia și coloana a doua, a treia etc.

7. Folosind numai definiția determinantului, să se arate că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{24} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Indicație. Se va observa că într-un termen oarecare $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\ldots a_{5\alpha_5}$, trei dintre cei cinci factori sînt elemente din linia a treia, a patra și a cincea și nu pot aparține toți trei primelor două coloane.

9.3. Teoremă. *Dacă matricea B se deduce din matricea pătrată A printr-o permutare p a liniilor, are loc egalitatea*

$$\det B = \varepsilon(p) \det A.$$

Amintim că $\varepsilon(p)$ este signatura permutării p, adică este întregul $+1$ dacă permutarea p este pară și este întregul -1 dacă p este o permutare impară.

Demonstrație. Într-adevăr, o permutare executată asupra indicilor, care arată liniile în dezvoltarea (9.1) a funcției det A, schimbă între ei termenii sumei din partea dreaptă a egalității (9.1). Termenii precedați de semnul $+$ se schimbă tot în termeni precedați de $+$ dacă p este o permutare pară (în acest caz, termenii precedați de semnul $-$ se schimbă în termeni precedați de același semn); dacă p este o permutare impară, fiecare termen al dezvoltării se schimbă într-un termen precedat de semnul contrar.

În particular, *dacă matricea B se deduce din A printr-o transpoziție a două linii, atunci* $\det B = -\det A$.

Se enunță acest fapt și în modul următor: determinantul este o funcție *alternată* de liniile sale (ale matricei).

Corolar. *Dacă matricea pătrată A are două linii (coloane) identice, atunci* $\det A = 0$. În acest caz, matricea B care se deduce din A prin transpoziția liniilor (coloanelor) egale, coincide cu A; prin urmare, $\det A = \det B = -\det A$.

Dăm sub o formă mai amănunțită demonstrația teoremei precedente, în cazul unei transpoziții de linii. Fie

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{l-1,1} & b_{l-1,2} & \dots & b_{l-1,n} \\ b_{l1} & b_{l2} & \dots & b_{ln} \\ b_{l+1,1} & b_{l+1,2} & \dots & b_{l+1,n} \\ b_{l+2,1} & b_{l+2,2} & \dots & b_{l+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l-1,1} & a_{l-1,2} & \dots & a_{l-1,n} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matricea care se deduce din A schimbînd între ele liniile l și $l+1$. Avem

$$\det B = \sum \varepsilon(\beta)\, b_{1\beta_1} \dots b_{l-1,\beta_{l-1}}\, b_{l,\beta_l}\, b_{l+1,\beta_{l+1}}\, b_{l+1,\beta_{l+2}}\, b_{n,\beta_n} =$$

$$= \sum \varepsilon(\beta) a_{1\beta_1} \dots a_{l-1,\beta_{l-1}}\, a_{l+1,\beta_l}\, a_{l,\beta_{l+1}}\, a_{l+2,\beta_{l+2}} \dots a_{n,\beta_n}.$$

Permutarea

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l-1 & l & l+1 & l+2 & \dots & n \\ \beta_1 & \dots & \beta_{l-1} & \beta_l & \beta_{l+1} & \beta_{l+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

se poate scrie sub formă de produs astfel:

$$\beta = (l, l+1) \begin{pmatrix} 1 & \dots & l-1 & l+1 & l & l+2 & \dots & n \\ \beta_1 & \dots & \beta_{l-1} & \beta_l & \beta_{l+1} & \beta_{l+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \alpha \circ t_l,$$

unde

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \dots & l-1 & l+1 & l & l+2 & \dots & n \\ \beta_1 & \dots & \beta_{l-1} & \beta_l & \beta_{l+1} & \beta_{l+2} & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

oar $t_l = (l, l+1)$. Prin urmare, $\varepsilon(\beta) = -\varepsilon(\alpha)$.

Astfel, punînd $\alpha_i = \beta_i$ pentru $i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, n$ şi $\alpha_l = \beta_{l+1}$, $\alpha_{l+1} = \beta_l$, putem scrie

$$\det B = \sum \varepsilon(\beta)\, a_{1\beta_1} \ldots a_{l-1,\beta_{l-1}}\, a_{l+1,\beta_l}\, a_{l,\beta_{l+1}}\, a_{l+2,\beta_{l+2}} \ldots a_{n,\beta_n} =$$

$$= -\sum \varepsilon(\alpha)\, a_{1\alpha_1} \ldots a_{l-1,\alpha_{l-1}}\, a_{l,\alpha_l}\, a_{l+1,\alpha_{l+1}}\, a_{l+2,\alpha_{l+2}} \ldots a_{n,\alpha_n} = -\det A.$$

Cazul unei permutări oarecare se demonstrează combinînd cazul unei transpoziţii cu faptul că orice permutare este un produs de transpoziţii sau, se poate repeta demonstraţia precdeentă, înlocuind transpoziţia t cu permutarea p.

Exerciţiu. Să se formuleze teorema şi corolarul enunţate pentru coloanele matricei A. Să se facă acelaşi lucru cu demonstraţia teoremei.

9.4. **Dezvoltarea determinantului după elementele unei coloane. Minori.** Definiţia (9.1) a determinantului este simplă şi din această definiţie se deduc uşor proprietăţile acestei funcţii.

Dar calculul determinantului de ordinul n, plecînd direct de la această definiţie, este anevoios dacă n este mare. Este greu să scriem toate cele $n!$ permutări, să punem în evidenţă paritatea fiecăreia şi apoi pentru fiecare permutare să calculăm monomul respectiv. De exemplu, determinantul de ordinul al şaselea este, conform acestei definiţii o sumă de $6! = 720$ de termeni. Uneori este mai comod să punem dezvoltarea determinantului sub forme speciale.

În acest scop, să ne fixăm un element al matricei A, de exemplu a_{11}, şi să considerăm mai întîi suma tuturor termenilor din (9.1) care au în factor elementul a_{11} : această sumă se scrie

$$\sum \varepsilon(\alpha)\, a_{11} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}.$$

Suma scrisă se referă la toate permutările α de forma

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

Fiecare dintre aceste permutări defineşte o permutare

$$\alpha' = \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

restricţia lui α la mulţimea $\{2, \ldots, n\}$. Este clar că $\varepsilon(\alpha) = \varepsilon(\alpha')$ pentru că α şi α' prezintă aceleaşi inversiuni [faţă de perechile $(1, i)$ permutarea α nu prezintă nici o inversiune]. Astfel putem scrie

$$\sum_{\alpha} \varepsilon(\alpha)\, a_{11} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} = a_{11} \Big[\sum_{\alpha'} \varepsilon(\alpha')\, a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n}\Big].$$

Suma din paranteza dreaptă este

$$\det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

determinantul matricei care se deduce din $\det A$ suprimînd linia şi coloana elementului a_{11}. Acest determinant se notează cu A_{11} şi se numeşte *minorul* elementului a_{11} în $\det A$.

Acum putem indica, în acelaşi mod, suma tuturor termenilor din (9.1) care au ca factor un element a_{ij}. Pentru aceasta este comod să ducem elementul a_{ij} în locul elementului a_{11} prin transpoziţii de linii şi coloane.

Astfel prin $i-1$ transpoziţii de linii se poate aduce linia i în locul primei linii, lăsînd neschimbată poziţia relativă a celorlalte linii; la fel, prin $j-1$ transpoziţii de coloane putem aduce coloana j în locul primei coloane. Această schimbare de linii şi coloane transformă matricea A într-o matrice A' în care a_{ij} este elementul din prima linie şi prima coloană. Deoarece A' se deduce din A prin $i-1$ transpoziţii de linii, urmate, sau precedate, de $j-1$ transpoziţii de coloane, avem egalitatea $\det A' = (-1)^{i+j-2} \det A = (-1)^{i+j} \det A = (-1)^{i-j} \det A$ sau $\det A = (-1)^{i+j} \det A'$.

Suma termenilor din $\det A'$ care au ca factor pe a_{ij} este egală cu determinantul matricei ce se deduce din A' suprimînd prima linie şi coloana întîi din această matrice, adică linia i şi coloana j din matricea A. Rezultă că în dezvoltarea (9.1) a lui $\det A$ suma termenilor care au în factor elementul a_{ij} se poate scrie sub forma $a_{ij} A_{ij}$, unde

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A_{ij} se numeşte *adjunctul* elementului a_{ij}. Acum să observăm că în dezvoltarea (9.1) a funcţiei $\det A$, în fiecare termen figurează numai cîte un element de forma $a_{1\alpha_1}$. Suma termenilor care cuprind ca factor elementul a_{11} este $a_{11}A_{11}$; suma termenilor care cuprind pe a_{12} ca factor este $a_{12}A_{12}$ ş.a.m.d.; astfel că putem scrie

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}. \tag{9.2}$$

La fel fixînd o linie oarecare i, putem scrie

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}. \tag{9.2'}$$

Aceasta se numeşte *dezvoltarea determinantului matricei A după elementele liniei i* sau după linia i.

Fixînd o coloană oarecare j, putem scrie de asemenea

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}.$$

Aceasta se numeşte dezvoltarea determinantului după coloana j.

Exemple.

1° $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{22}A_{32}$

(după linia întîi) (după linia a doua) (după coloana a doua)

unde

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \text{ ş. a. m. d.}$$

2°. Să se calculeze determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd după linia a patra, putem scrie

$$D = d \begin{vmatrix} a & 3 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}.$$

Dezvoltînd după coloana a treia determinantul de ordinul al treilea, avem

$$D = dc \begin{vmatrix} a & 3 \\ 0 & b \end{vmatrix} = abcd.$$

9.5. Alte proprietăţi importante ale determinantului de ordinul n

III—IV. *Proprietatea de liniaritate în raport cu liniile şi coloanele a determinantului.* Pentru un determinant de ordinul n au loc relaţiile

$$\det \begin{pmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_{n1} + a''_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a''_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a''_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a''_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

$$\det \begin{pmatrix} ta_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ ta_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = t \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9.4}$$

Amîndouă aceste relaţii se demonstrează considerînd dezvoltarea funcţiei

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

după prima coloană şi înlocuind în această dezvoltare fiecare element a_{i1} cu suma $a'_{i1} + a''_{i1}$ sau, respectiv, cu produsul ta_{i1}, ca şi în cazul determinantului de ordinul al treilea.

Se înţelege că relaţiile (9.3) şi (9.4) se pot scrie pentru fiecare coloană a matricei A (şi pentru fiecare linie). Aceste relaţii se enunţă, în cuvinte, spunînd: *funcţia* det A *este liniară în raport cu fiecare*

coloană a matricei A și în raport cu fiecare linie. Ele se pot scrie într-o singură formulă

$$\det\begin{pmatrix} sa'_{11}+ta''_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ sa'_{21}+ta''_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ sa'_{n1}+ta''_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=s\det\begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a'_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a'_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}+t\det\begin{pmatrix} a''_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a''_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a''_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}. \qquad (9.5)$$

Pentru $s=t=1$ relația (9.5) se reduce la (9.3); pentru $s=0$, această relație se reduce la (9.4).

Proprietatea IV, combinată cu corolarul de la proprietatea II, ne dă următorul

Corolar

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}+ta_{12} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21}+ta_{22} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n1}+ta_{n2} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Într-adevăr, conform relației (9.5), determinantul din stînga este egal cu

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}+t\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12}\dots a_{1n}\\ a_{22} & a_{22}\dots a_{2n}\\ \dots\dots & \dots\dots\\ a_{n2} & a_{n2}\dots a_{nn}\end{pmatrix}$$

și conform corolarului amintit, factorul care înmulțește pe t în această sumă este nul.

O relație asemănătoare celei din corolarul de față poate fi scrisă adunînd la prima coloană fiecare dintre celelalte coloane înmulțită cu un factor; de asemenea putem scrie o astfel de relație înlocuind

prima coloană cu oricare dintre coloanele matricei A. În sfîrşit putem scrie o relaţie asemănătoare pentru liniile matricei.

Proprietatea din acest corolar se enunţă astfel: *determinantul nu se schimbă dacă la una dintre coloane (linii) adunăm pe celelalte înmulţite cu cîte un număr.*

Exemplu. Pentru a calcula determinantul

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix},$$

este convenabil să scădem din ultima linie semisuma liniilor a doua şi a treia; obţinem

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Toate proprietăţile enumerate la punctul 7.4 pentru determinantul de ordinul al treilea sînt valabile şi pentru determinantul de ordinul n; demonstraţiile lor se fac în acelaşi mod. Aceste proprietăţi se obţin din proprietăţile I—IV, prin raţionamente identice cu cele din § 6.

Să considerăm, spre exemplu, proprietatea XI; această proprietate este valabilă pentru o matrice pătrată A de ordinul n: *Dacă una dintre coloanele matricei A este o combinaţie liniară a celorlalte coloane, atunci* $\det A = 0$.

Este destul să demonstrăm afirmaţia pentru ultima coloană; cazul unei coloane oarecare se deduce din acesta printr-o permutare convenabilă a coloanelor.

Să presupunem, prin urmare, că există numere $x_1, \ldots, x_{n-1}$ astfel încît să putem scrie $a_{in} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i\,n-1}x_{n-1}$, $(i = 1, \ldots, n)$. În acest caz putem scrie

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Proprietatea reciprocă analogă proprietății XII va fi demonstrată ulterior.

9.6. **Teorema.** *Dacă A și B sînt două matrice pătrate de același ordin, are loc relația*

$$\det (AB) = \det A \det B.$$

Demonstrație. Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \\ a_{21} & b_{22} \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ b_{n1} & b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Să punem $AB = C$, elementele c_{ij} ale lui C sînt date de formulele

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}, \ldots,$$
$$c_{1n} = a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \ldots + a_{1n}b_{nn},$$
$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1}, \ldots,$$
$$c_{2n} = a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \ldots + a_{2n}b_{nn},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$c_{n1} = a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \ldots + a_{nn}b_{n1}, \ldots,$$
$$c_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn}.$$

Fiecare coloană a matricei C este o sumă de n coloane. Astfel prima coloană este o sumă de n coloane de forma

$$b_{\alpha_1 1}\begin{pmatrix} a_{1\alpha_1} \\ a_{2\alpha_1} \\ \vdots \\ a_{n\alpha_1} \end{pmatrix} \text{ care se pot scrie și sub forma } \begin{pmatrix} a_{1\alpha_1} \\ a_{2\alpha_1} \\ \vdots \\ a_{n\alpha_1} \end{pmatrix} b_{\alpha_1 1};$$

la fel, coloana a doua este o sumă de n coloane de forma

$$\begin{pmatrix} a_{1\alpha_2} \\ a_{2\alpha_2} \\ \vdots \\ a_{n\alpha_2} \end{pmatrix} b_{\alpha_2 2};$$

etc.; coloana n este o sumă de n coloane de forma

$$\begin{pmatrix} a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_n} \\ \vdots \\ a_{n\alpha_n} \end{pmatrix} b_{\alpha_n n}.$$

În conformitate cu această situație, determinantul matricei C se poate scrie ca o sumă de n^n termeni

$$\det C = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} \ldots a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} \ldots a_{2\alpha_n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \end{vmatrix} b_{\alpha,1}\, b_{\alpha_2 2} \ldots b_{\alpha_n n} \quad (9.7)$$

fiecare termen fiind produsul dintre un determinant și un număr $b_{\alpha,1} \ldots b_{\alpha_n n}$.

Observăm acum că dintre cei n^n determinanți din (9.7) sînt egali cu zero acei pentru care indicii $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nu sînt distincți între ei (sînt egali cu zero ca avînd două coloane identice). Determinanții din dreapta semnului de egalitate din (9.7) pentru care indicii

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sînt distincți între ei, sînt, în afară de semn, egali cu $\det A$ și anume, putem scrie

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \ldots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \ldots & a_{2\alpha_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \ldots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix} = \varepsilon(\alpha) \det A, \tag{9.8}$$

unde $\varepsilon(\alpha)$ este signatura permutării

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

α este permutarea coloanelor matricei A, prin care se obține din A matricea al cărei determinant este scris în stînga semnului de egalitate din (9.8)

Prin urmare, egalitatea (9.7) se mai poate scrie

$$\det C = \sum_{\alpha \in \sigma_{(n)}} \det A \; \varepsilon(\alpha) \, b_{\alpha,1} \ldots b_{\alpha_n n} =$$

$$= \det A \sum_{\alpha \in \sigma_{(n)}} \varepsilon(\alpha) \, b_{\alpha,1} \ldots b_{\alpha_n n}. \tag{9.7'}$$

Însă

$$\sum_{\alpha \in \sigma_{(n)}} \varepsilon(\alpha) \, b_{\alpha,1} \ldots b_{\alpha_n n} = \det B$$

[v. (9.1)]. Astfel $\det (AB) = \det C = \det A \det B$, c.c.t.d.

9.7. În 6.4, p. 39 a fost definită noțiunea de matrice inversabilă și a fost arătat că o matrice pătrată A de ordinul al doilea este inversabilă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$.

Acum după ce am demonstrat teorema relativă la determinantul produsului a două matrice pătrate de ordinul n (arbitrar), putem enunța, mai general, următoarea

Teoremă. *Singurele matrice inversabile sînt matricele pătrate, cu determinantul diferit de zero.*

Într-adevăr, dacă matricea A este inversabilă, înseamnă că există o matrice A' astfel încît să putem scrie $AA' = A'A = U$, U fiind matricea unitate, cu n linii şi n coloane

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Din egalitatea $AA' = A'A = U$ rezultă că A şi A' au acelaşi număr de linii şi acelaşi număr de coloane ca şi U (v. 6.4). Considerînd determinanţii în aceeaşi egalitate, putem scrie

$$\det A \det A' = \det U = 1,$$

ceea ce arată că $\det A \neq 0$. Deci teorema este demonstrată. Mai mult, notînd cu A^{-1} inversa unei matrice inversabile A, avem egalitatea

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

9.8. Pe mulţimea $\mathcal{M}(n, k)$ a matricelor pătrate de ordinul n, cu elemente dintr-un inel *)k a fost definită funcţia determinant, $\det X$, cu valori în k şi cu următoarele proprietăţi: 1° $\det X$ este o funcţie alternată de coloanele matricei X (v. 9.3, p. 75); 2° $\det X$ este o funcţie liniară de coloanele matricei X (v. 9.5, p. 79); 3° însemnînd cu U matricea unitate, $\det U = 1$.

Se poate arăta că proprietăţile 1°, 2° şi 3°, luate împreună, caracterizează funcţia determinant. Anume, ca un corolar al teoremei precedente, relativă la determinantul produsului a două matrice, putem demonstra următoarea

Teoremă. *Fie f o funcţie definită pe mulţimea $\mathcal{M}(n, k)$, cu valori în k şi astfel încît, pentru orice matrice $X \in \mathcal{M}(n, k)$:*

1° *$f(X)$ să fie o funcţie alternată de coloanele matricei X;*

2° *$f(X)$ să fie o funcţie liniară de coloanele matricei X;*

3° *însemnînd cu U matricea unitate din $\mathcal{M}(n, k)$, f să îndeplinească condiţia $f(U) = 1$; o astfel de funcţie f este egală cu funcţia determinant, $f(X) = \det X$ pentru orice $X \in \mathcal{M}(n, k)$.*

---

*) De exemplu; ne putem gîndi la inelul întregilor raţionali, la corpul numerelor raţionale, la corpul numerelor reale sau la corpul numerelor complexe.

Demonstrație. Pentru noțiunile de funcție liniară și funcție alternată de coloanele matricei X, să se revadă explicațiile de la punctul 7.3. Amintim numai că, dacă $f(X)$ este funcție alternată de coloanele matricei X și dacă matricea X' are două coloane identice, atunci $f(X') = 0$, iar dacă X'' se deduce din X printr-o permutare α a coloanelor, atunci $f(X'') = \varepsilon(\alpha) f(X)$. De asemenea, dacă $f(X)$ este funcție liniară de coloanele matricei X și dacă $X = (x_{ij})$ cu

$$x_{i1} = \sum_j x_{i1}^j y_{j1}, \quad x_{i2} = \sum_k x_{i2}^k y_{k2}, \ \ldots, \ x_{in} = \sum_l x_{in}^l y_{ln},$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci

$$f(X) = \sum_{j,k,\ldots l} y_{j1} y_{k2} \cdots y_{ln} f(X^{jk\ldots l}),$$

unde

$$X^{jk\ldots l} = \begin{pmatrix} x_{11}^j & x_{12}^k & \cdots & x_{1n}^l \\ x_{21}^j & x_{22}^k & \cdots & x_{2n}^l \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}^j & x_{n2}^k & \cdots & x_{nn}^l \end{pmatrix}$$

Cu aceste precizări putem trece la demonstrarea teoremei.

Să considerăm două matrice pătrate $X = (x_{hi})$ și $Y = (y_{ij})$ de ordinul n, din $\mathcal{M}(n, k)$ și matricea $Z = XY$.

Dacă notăm cu z_{hj} elementele matricei Z, avem relațiile

$$z_{hj} = \sum_{i=1}^{n} x_{hi} y_{ij}.$$

Astfel, fiecare coloană j a matricei Z este o combinație liniară

$$\sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \cdots \\ x_{ni} \end{pmatrix} y_{ij}$$

(v. demonstrația teoremei precedente). Din proprietatea 2° de liniaritate a funcției f, rezultă că putem scrie

$$f(Z) = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} f(X^{i_1,i_2,\ldots,i_n}) y_{i_1,1} y_{i_2,2} \cdots y_{i_n n} \qquad (9.6)$$

cu

$$X^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{pmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} & \ldots & x_{1i_n} \\ x_{2i_1} & x_{2i_2} & \ldots & x_{2i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{ni_1} & x_{ni_2} & \ldots & x_{ni_n} \end{pmatrix}.$$

Suma din dreapta semnului de egalitate din (9.6) are n^n termeni. Dintre aceştia sînt nuli acei pentru care indicii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ nu sînt distincţi între ei; $f(X^{i_1, i_2, \ldots, i_n}) = 0$ din cauza proprietăţii 1°. Pentru acelaşi motiv, dacă indicii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sînt diferiţi,

$$f(X^{i_1, i_2, \ldots, i_n}) = \varepsilon(i) f(X)$$

(am notat cu $\varepsilon(i)$ signatura permutării $i = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & n \\ i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, ca şi în teorema precedentă). Într-adevăr, în acest caz, matricea $X^{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ se deduce din matricea X prin permutarea i a coloanelor. Astfel, putem scrie

$$f(Z) = f(X)[\sum \varepsilon(i)\, y_{i_1 1}\, y_{i_2 2} \ldots y_{i_n n}].$$

Să presupunem acum că $X \equiv U$. În acest caz, avem $Z = UY = Y$, $f(X) = 1$ (proprietatea 3°) şi

$$f(Y) = f(Z) = \sum \varepsilon(i)\, y_{i_1 1}\, y_{i_2 2} \ldots y_{i_n n} = \det Y.$$

Cum Y este oarecare din $\mathcal{M}(n, k)$, teorema rezultă demonstrată.

9.9. Exerciţii

1. Se consideră matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şi numerele $n_1 = 1966$, $n_2 = 1710$, $n_3 = 0102$, $n_4 = 2100$, care se obţin citind liniile matricei ca şi cum ar fi numere scrise în sistemul zecimal; să se arate că c.m.m.d.c. al numerelor n_1, n_2, n_3 şi n_4 divide numărul $\det A$. Generalizare la o matrice de ordinul n.

Indicaţie. Se va observa că din matricea A se poate deduce o matrice B care să aibă acelaşi determinant şi în care ultima coloană să fie formată din numerele n_1, n_2, n_3, n_4.

2. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

dezvoltîndu-l după linia a treia.

3. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix},$$

dezvoltîndu-l după coloana a treia.

4. Să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ q & h & k & u & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix},$$

Indicație. Se procedează ca în exemplul 2 de la p. 78.

5. Să se calculeze determinanții matricelor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Indicație. Se adună la prima coloană toate celelalte coloane; se dă 3 în factor și apoi se scade prima coloană din a doua, a treia și a patra; se găsește $\det A = -3$, $\det B = -16$.

6. Să se calculeze determinanţii matricelor

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

R. $|A|=+9,\ |B|=1,\ |C|=1,\ |D|=9\sqrt{10}\,(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

Observaţii cu privire la calculul determinantului unei matrice, cînd aceasta are formă particulară. În general, calculul unui determinant se face plecînd direct de la definiţia lui sau se reduce la calculul unor determinanţi de ordin inferior, dezvoltîndu-l după o linie sau o coloană.

Pentru motive evidente de simplificare, se dezvoltă determinantul după linia sau coloana care are cele mai puţine elemente nenule.

Uneori se realizează această situaţie adunînd o linie (coloană) înmulţită cu un factor convenabil, la celelalte linii (coloane, respectiv).

Exemplu. Determinantul $|A|$ din exerciţiul 6 este egal cu determinantul matricei

$$A'=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

în care prima linie este identică cu prima linie a matricei, linia a doua este suma dintre linia a doua şi linia întîi a lui A; linia a treia se obţine scăzînd din linia a treia prima linie a lui A înmulţită cu doi; ultima linie se obţine din ultima linie a lui A, scăzînd linia întîi. Avem

$$\det A'=\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}=9.$$

Astfel, cu unele calcule preliminarii, calculul determinantului unei matrice de ordinul n se poate reduce la calculul determinantului unei matrice de ordinul $n-1$ şi procedeul se poate repeta.

Pentru matrice speciale, toate etapele succesive de reducerea ordinului pot fi cumulate într-una singură, numită *reducere la forma triunghiulară*.

Exemple. Fie de calculat determinantul matricei de ordinul n

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Scăzînd prima linie din fiecare dintre celelalte, obţinem matricea

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

Este evident că $\det M = \det M' = (-1)^{n-1}$.

Să se aplice acest procedeu pentru calculul determinantului matricei B din exerciţiul 5.

Exerciţii. Să se calculeze, prin reducere la forma triunghiulară determinanţii următoarelor matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}.$$

(Se găseşte $\det A = n!$, $\det B = \det B'$ cu

$$B' = \begin{pmatrix} n & n & \dots & n & n & n \\ n & n & \dots & n & n & n-1 \\ n & n & \dots & n & n-1 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & \dots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

şi $\det B' = n \det B''$ cu

$$B'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -1 & \dots & -n+3 & -n+3 & -n+1 \end{pmatrix};$$

$$\det B'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \dots & -1 & -2 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & -n+3 & -n+2 & -n+1 \end{pmatrix} = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

$\det C = (2n+1)$; $\det D = (-1)^{n-1}\, n!$

Un procedeu de calcul, care dă rezultate bune în unele cazuri, se sprijină pe faptul că unii determinanți se pot scrie ca sume de determinanți, care, la rîndul lor, se calculează ușor.

Exemplu: Fie matricea

$$X = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Putem scrie, folosind proprietatea determinantului de a fi funcție liniară de coloanele matricei, $\det X = \det X_1 + \det X_2$, cu

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ a_2 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 + b_2 & \dots & a_1 + b_n \\ b_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_2 + b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n + b_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Acum este clar că

$$\det X_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_2 & b_2 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \det X_2 = \det \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ b_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & a_n & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Dacă $n > 2$, $\det X_1 = \det X_2 = 0$, ca avînd (cel puțin) două coloane identice; deci, în acest caz, $\det X = 0$.

Dacă $n = 2$, $\det X_1 = a_1 b_2 - a_2 b_2$ și $\det X_2 = b_1 a_2 - a_1 b_1$; deci

$$\det X = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2).$$

Acest procedeu poate fi urmat pentru a demonstra, în mod simplu, proprietatea importantă: $\det (AB) = \det A \det B$ și alte proprietăți.

Exercițiu. Să se calculeze determinantul matricei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

Indicație. Se consideră succesiv coloana n, $n-1$ etc. ca sume de două coloane și se aplică procedeul indicat; se găsește o formulă de recurență:

$$\det A = b_1 \dots b_n \left(1 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_n}{b_n}\right).$$

§ 10. Rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul întîi cu ajutorul determinanților

10.1. **Sisteme Cramer.** Determinantul de ordinul n a fost definit prin analogie, plecînd de la dezvoltarea determinantului de ordinul al doilea și a determinantului de ordinul al treilea, care au apărut în legătură cu rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul întîi cu două, respectiv, cu trei necunoscute.

Teoria determinanților de ordinul n este și ea strîns legată de teoria sistemelor de ecuații de gradul întîi.

Astfel, să considerăm un sistem de n ecuații de gradul întîi cu n necunoscute

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

Să notăm cu A matricea coeficienților necunoscutelor din acest sistem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că sistemul (10.1) are o soluție $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Aceasta înseamnă că există numerele $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, care verifică ecuațiile $\sum_{j=1} a_{ij} \alpha_j = b_i$, $i = 1, \dots, n$. Să înmulțim prima coloană a matricei A cu α_1; putem scrie

$$\alpha_1 \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \alpha_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_1 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \alpha_1 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Determinantul matricei din partea dreaptă a semnului de egalitate nu se schimbă, dacă adunăm la prima coloană coloana a doua înmulţită cu α_2, coloana a treia înmulţită cu α_3, ..., ultima coloană înmulţită cu α_n. Prin urmare

$$\alpha_1 \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2n}\alpha_n & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n & a_{n2} \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Observăm acum că dacă $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ este o soluţie a sistemului (10.1), atunci elementele primei coloane a matricei din dreapta semnului de egalitate din (10.2) sînt egale respectiv cu $b_1, \ldots, b_n$, prin urmare, putem scrie

$$\alpha_1 \det A = \det A_1,$$

punînd

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dacă, în loc să înmulţim prima coloană a matricei A cu α_1, înmulţim coloana a doua a acestei matrice cu α_2 şi adunăm apoi la rezultat prima coloană înmulţită cu α_1, coloana a treia înmulţită cu α_3, ..., coloana n înmulţită cu α_n, obţinem relaţia

$$\alpha_2 \det A = \det A_2;$$

aici

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Procedînd în mod analog cu coloana a treia, obţinem relaţia

$$\alpha_3 \det A = \det A_3,$$

în care A_3 este matricea dedusă din A înlocuind coloana a treia cu coloana termenilor liberi din sistemul (10.1).

Procedeul se aplică la fel şi pentru coloana a patra, ..., şi pentru coloana n a matricei A.

Obținem astfel următorul rezultat: *dacă sistemul* (10.1) *admite o soluție* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *elementele acelei soluții trebuie să verifice sistemul*

$$ax_1 = a_1', \quad ax_2 = a_2', \ldots, ax_n = a_n, \tag{10.3}$$

în care $a = \det A$, $a_i = \det A_i$, A_i fiind matricea care se deduce din A prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi din sistemul (10.1).

Rezultă că *dacă* $\det A \neq 0$, *sistemul* (10.1) *are o singură soluție*, pentru că fiecare dintre ecuațiile (10.3) are o singură soluție.

Dacă am avea și $ax_1' = a_1$, de exemplu, atunci ar fi $a(x_1' - x_1) = 0$, deci $x_1' - x_1 = 0$, căci $a \neq 0$.

Să verificăm acum că, dacă $\det A \neq 0$ soluția sistemului (10.3) este și soluție pentru sistemul (10.1).

Vom face acest lucru pentru prima ecuație din sistemul (10.1). În acest scop, este bine să dezvoltăm determinantul a_i al matricei A după elementele coloanei i, formată de $b_1, \ldots, b_n$:

$$a_i = \det A_i = (-1)^{i-1} b_1 A_{1i} + (-1)^{i-2} b_2 A_{2i} + \cdots + (-1)^{i-n} b_n A_{ni}.$$

Amintim că A_{hi} înseamnă determinantul matricei care se deduce din A suprimînd linia h și coloana i.

Înlocuind în prima ecuație din (10.1) necunoscuta x_i, $i = 1, \ldots, n$, cu $\frac{a_i}{a}$, avem în partea stîngă

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{a_i}{a} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{1i} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} b_h A_{hi}.$$

Este clar că $(-1)^{i-1+h-1} = (-1)^{i+h}$, $(-1)^{i+1} = (-1)^{i-1}$ etc.

Indicele i, în raport cu care se face suma $\sum_i$ și indicele h, la care se referă suma $\sum_h$, primesc, independent unul de altul, toate valorile $1, \ldots, n$: întîi se face suma celor n termeni $(-1)^{h-1} b_h A_{hi}$ care se înmulțesc cu $(-1)^{i-1} a_{1i}$ și apoi se face suma în raport cu i. Avînd în vedere distributivitatea înmulțirii față de adunare, putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \frac{a_i}{a} = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{i+h} a_{1i} b_h A_{hi}.$$

Să regrupăm termenii din partea dreaptă, scriindu-i întîi pe cei care au ca factor pe b_1, apoi pe cei cu b_2 etc.; vom avea

$$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}\frac{a_i}{a} = \frac{1}{a}b_1\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}A_{1i} + \sum_{h}^{n}(-1)^{h-1}b_h\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}A_{hi}\right).$$

Observăm că

$$\frac{1}{a}b_1\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}A_{1i}\right) = b_1,$$

deoarece suma din această paranteză este chiar dezvoltarea lui $\det A$ după prima linie. De asemenea observăm că paranteza care înmulțește pe b_h, $h \geqslant 2$, este nulă, deoarece $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\ a_{1i}A_{hi}$ se obține înlocuind cu a_{1i} elementul a_{hi} în suma $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\ a_{hi}A_{hi}$ care în afară de semn este dezvoltarea lui $\det A$ după linia h, adică $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}A_{hi}$ este determinantul matricei A' care se deduce din A înlocuind linia h cu linia întîi; matricea A' are două linii egale (linia întîi și linia h), și deci determinantul său este nul:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{1i}A_{hi} = 0 \text{ pentru } h \neq 1.$$

Astfel avem $\sum_{i=1}^{n}a_{1i}\frac{a_i}{a} = b_1$, ceea ce arată că soluția sistemului (10.3) verifică și prima ecuație din sistemul (10.1). La fel se face verificarea și pentru celelalte ecuații.

Exercițiu. Să se facă verificarea pentru ecuația a doua.

Un sistem de n ecuații de gradul întîi cu n necunoscute de forma (10.1), pentru care matricea A a coeficienților are determinantul nenul, se numește *sistem Cramer*.

Rezumînd, am demonstrat următoarea

Teoremă. *Orice sistem Cramer* (10.1) *are o singură soluție, dată de formulele (lui Cramer)*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}, \tag{10.4}$$

în care A_k este matricea dedusă din A prin înlocuirea coeficienților lui x_k cu termenii liberi $b_1, \ldots, b_n$.

Formulele (10.4) se deduc din ecuațiile (10.3).

Dacă sistemul (10.1) este omogen și det $A \neq 0$, din ecuațiile (10.3) sau din formulele (10.4) rezultă că (10.1) admite singura soluție $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Această soluție se numește *soluție banală*. Altfel spus : *orice sistem Cramer omogen admite numai soluția banală.*

10.2. **Calculul inversei unei matrice.** Am văzut, la punctul 6.4, p. 40 că numai matricele pătrate cu determinantul nenul sînt inversabile. Rezolvarea sistemelor Cramer poate fi aplicată la calculul inversei unei matrice inversabile A de ordinul n.

Dacă A este inversabilă, inversa sa este o matrice X, care verifică ecuația

$$AX = U,$$

U fiind matricea unitate de ordinul n.

Observăm că elementele lui X din prima coloană figurează numai în prima coloană a matricei AX, după definiția produsului ; dacă,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

elementele primei coloane din produsul AX sînt

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_{11} + a_{12}\,x_{21} + \ldots + a_{1n}\,x_{n1} \\ a_{21}\,x_{11} + a_{22}\,x_{21} + \ldots + a_{2n}\,x_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_{11} + a_{n2}\,x_{21} + \ldots + a_{nn}\,x_{n1} \end{array}\right\}$$

Egalînd aceste sume cu 1, 0, ..., 0, respectiv, (cu elementele care formează prima coloană a lui U), găsim că $x_{11}, \ldots, x_{n1}$ formează soluția unui sistem Cramer. La fel elementele din coloana a doua a lui X formează soluția sistemului

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = 0 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = 1 \\ a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + \ldots + a_{3n}\,x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n = 0 \end{array}\right\}$$

La fel pentru fiecare dintre coloanele următoare se scrie cîte un sistem Cramer în care termenii liberi formează coloana h a matricei unitate U şi a cărui soluţie este formată din elementele coloanei h a matricei X.

Astfel, calculul inversei unei matrice inversabile de ordinul n se reduce la rezolvarea a n sisteme Cramer (v. exemplul din 6.4).

Dacă rezolvarea sistemelor Cramer poate fi utilizată pentru calculul inversei unei matrice inversabile, problema rezolvării unui sistem Cramer, la rîndul ei, se poate formula uşor şi simplu cu ajutorul matricelor.

Astfel, notînd cu A matricea coeficienţilor sistemului Cramer şi punînd

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

acel sistem devine echivalent cu ecuaţia

$$AX = B, \tag{10.5}$$

după cum se vede scriind că sînt egale, element cu element, matricele AX şi B.

Deoarece $\det A \neq 0$, matricea A admite o inversă A^{-1} (după cum am văzut mai înainte). Înmulţind cu A^{-1} la stînga, atît în prima parte a egalităţii cît şi în partea a doua, obţinem

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B.$$

Dar $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X$, $A^{-1}A = U$ şi $UX = X$; prin urmare,

$$X = A^{-1}B. \tag{10.6}$$

Astfel, *orice sistem Cramer* (10.1) *se poate pune sub forma* (10.5) (*o singură ecuaţie matriceală cu o singură necunoscută*) iar *soluţia sa se poate pune sub forma condensată* (10.6), ceea ce arată că sistemele Cramer nu sînt mai complicate, din punct de vedere formal teoretic, decît o ecuaţie de gradul întîi cu o necunoscută. Acest fapt a condus la generalizări importante ale teoriei ecuaţiilor liniare.

Formula (10.6) de rezolvare a ecuaţiei (10.5) poate fi folosită pentru calculul inversei unei matrice inversabile, în modul următor:

Fie A o matrice pătrată de ordinul n cu $\det A \neq 0$.

Considerăm ecuaţia

$$AX = Y, \tag{10.7}$$

în care X și Y sînt două matrice coloane

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Ecuația considerată este echivalentă cu un sistem Cramer de ecuații de forma

$$\sum_{i=1}^{n} a_{hi}\, x_i = y_h, \quad (h = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{10.7'}$$

Rezolvînd acest sistem, pe o cale convenabilă, găsim formulele

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, y_j, \tag{10.7''}$$

care sub forma matriceală se scriu

$$X = BY. \tag{10.8}$$

Înlocuind în (10.7) pe X cu expresia sa din (10.8), obținem

$$ABY = Y.$$

Din această ecuație nu putem conchide imediat că AB este matricea unitate U, dar, întrucît putem scrie $Y = UY$, rezultă că avem

$$(AB - U)Y = 0. \tag{10.9}$$

De asemenea, în ecuația (10.9) nu putem simplifica, cu Y, dar observăm că elementele matricei Y sînt arbitrare; în particular putem presupune că $y_1 = 1$, $y_2 = \ldots = y_n = 0$. Mai observăm că

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

(De aceea se spune că matricea $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ este un *element neutru la*

dreapta, pentru înmulțire.) Prin urmare, avem

$$AB - U = (AB - U_{)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

adică $AB = U$.

La fel, înlocuind în (10.8) pe Y cu expresia sa din (10.7), deducem că $BA = U$. Aceste două relații arată că $B = A^{-1}$.

Am obținut astfel următoarea regulă:

Pentru a calcula inversa unei matrice inversabile A, se scrie sistemul de ecuații (10.7'), *în care coeficienții necunoscutelor sînt elementele matricei A, iar termenii liberi sînt niște parametri. Se rezolvă acest sistem și se scrie soluția sub forma* (10.7''); *matricea B a coeficienților parametrilor y este inversa lui A.*

Exemplu. Care este inversa matricei A, dacă

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Căutînd să rezolvăm direct ecuația

$$AX = U,$$

sîntem conduși la patru sisteme Cramer cu patru necunoscute. În loc de aceasta, să considerăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= y_1 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= y_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= y_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= y_4. \end{aligned}\right\}$$

Rezolvăm acest sistem, adunînd mai întîi toate ecuațiile:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

și apoi scăzînd din ecuația obținută, pe rînd, fiecare dintre ecuațiile sistemului; obținem

$$x_1 = \frac{1}{3}(-2y_1 + y_2 + y_3 + y_4),$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4) \text{ etc.}$$

Prin urmare,

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se verifice rezultatul calculînd pe AA^{-1} şi $A^{-1}A$.

10.3. Rezultatul obţinut în legătură cu sistemele Cramer cu n necunoscute are drept corolar următoarea

Teoremă. *Să presupunem că matricea*

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

are determinantul nul şi că, notînd cu A_n matricea care se obţine suprimînd ultima linie şi ultima coloană a lui A_{n+1}, $\det A_n \neq 0$; în aceste condiţii ultima coloană a lui A_{n+1} este o combinaţie liniară a primelor n coloane. (Acelaşi lucru se poate spune despre linii.)

Vom demonstra teorema pentru coloane; considerînd matricea transpusă, se deduce apoi, imediat, valabilitatea concluziei şi pentru linii.

Să considerăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}\right\}$$

Acesta este un sistem Cramer, deoarece $\det A_n \neq 0$.

Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ soluţia acestui sistem. Din ultima coloană a matricei A_{n+1} să scădem prima coloană înmulţită cu α_1, a doua coloană înmulţită cu $\alpha_2, \dots$, coloana n înmulţită cu α_n; vom obţine matricea

$$A'_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} & a' \end{pmatrix}$$

cu $a' = -a_{n+1,1}\ \alpha_1 - a_{n+1,2}\ \alpha_2 - \ldots - a_{n+1,\ n}\ \alpha_n + a_{n+1,n+1}$.

Prin ipoteza din enunțul teoremei, avem

$$0 = \det A_{n+1} = \det A'_{n+1} = a' \det A_n .$$

Prin urmare $a' = 0$; adică

$$a_{i,\,n+1} = a_{i,1}\,\alpha_1 + a_{i,2}\,\alpha_2 + \ldots + a_{i,n}\,\alpha_n$$

pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$, c.c.t.d.

10.4. Exerciții

1. Să se calculeze inversa matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

să se verifice rezultatul.

Indicație. Se va considera sistemul $x_1 - x_3 = y_1$, $-x_2 + x_3 = y_2$, $-x_1 + 2x_2 = y_3$, care rezolvat este de forma $X = A^{-1}Y$.

2. Aceeași problemă pentru matricele

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1+a \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 11. Sisteme (oarecare) de ecuaţii liniare

11.1. Să considerăm un sistem oarecare de m ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

Să notăm cu A matricea coeficienţilor necunoscutelor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Să considerăm matricea

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix},$$

matricea A se deduce din B prin suprimarea ultimei coloane.

Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor pătrate care rezultă din A cînd suprimăm în toate modurile posibile $m-r$ linii ale acestei matrice şi $n-r$ coloane, $1 \leqslant r \leqslant s$, s fiind cel mai mic dintre m şi n; fie $\mathcal{N}$ mulţimea matricelor pătrate care rezultă din B prin operaţii asemănătoare.

Să notăm cu rang$A$ cel mai mare dintre ordinele matricelor cu determinantul nenul din mulţimea $\mathcal{M}$; rang$A$ se numeşte *rangul* matricei A. În acelaşi mod se defineşte rangul unei matrice oarecare; în particular, rang$B$.

Observăm că, întrucît $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, în general, rang $A \leqslant$ rang B.

Teoremă. *Dacă sistemul* (11.1) *are o soluţie unică, atunci*

$$\text{rang } A = \text{rang } B.$$

Într-adevăr, dacă $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ este o soluţie a sistemului (11.1), avem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Prin urmare, orice matrice pătrată care aparţine mulţimii $\mathcal{N}$, aparţine lui $\mathcal{M}$ sau este de forma

$$D = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_s} & \sum_j a_{i_1 j}\,\alpha_j \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_s} & \sum_j a_{i_2 j}\,\alpha_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{s+1} j_1} & a_{i_{s+1} j_2} & \dots & a_{i_{s+1} j_s} & \sum_j a_{i_{s+1} j}\,\alpha_j \end{pmatrix}.$$

Observăm, însă, că deoarece ultima coloană a matricei D este o sumă de coloane de matrice din $\mathcal{M}$ (înmulţite fiecare cu cîte un factor α_j), det D este o combinaţie liniară de determinanţi det A' cu $A' \subset \mathcal{M}$. Dar det A' este nul, dacă ordinul lui A' este mai mare decît rang A; prin urmare, dacă ordinul lui D este mai mare decît rang A, det $D = 0$; aceasta arată că rang $B \leqslant$ rang A. Ultima relaţie împreună cu relaţia opusă care a fost observată mai sus, demonstrează teorema.

Un alt mod convenabil de a enunţa această teoremă este următorul: *dacă* rang $B \neq$ rang A (adică dacă rang $A <$ rang B), *sistemul* (11.1) *este incompatibil.*

Dacă rang $A =$ rang B, *sistemul* (11.1) *are soluţie.*

Într-adevăr, fie $r =$ rang $A =$ rang B şi să presupunem că una dintre matricele de ordin maxim cu determinantul nenul din mulţimea $\mathcal{M}$ este

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{pmatrix}.$$

Întotdeauna ne putem situa în această ipoteză, scriind ecuaţiile pe de o parte şi necunoscutele pe de alta, în ordine convenabilă. Astfel, det $C \neq 0$, dar dacă $r < m$ şi $r < n$, fiecare matrice de forma

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tr} & a_{ts} \end{pmatrix}$$

are determinantul nul, det $E = 0$; dacă $r < m$, fiecare matrice de forma

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{t1} & a_{t2} & \dots & a_{tr} & b_t \end{pmatrix}$$

are determinantul nul, det $F = 0$.

Să presupunem $r < m$; rezultă (v. punctul 10.3) că pentru fiecare t, $r < t \leqslant m$, există r numere $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, astfel încît

$$\left.\begin{aligned} a_{t1} &= \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \dots + \alpha_r a_{r1} \\ a_{t2} &= \alpha_1 a_{12} + \alpha_2 a_{22} + \dots + \alpha_r a_{r2} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{tr} &= \alpha_1 a_{1r} + \alpha_2 a_{2r} + \dots + \alpha_r a_{rr} \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

și dacă $r < n$,

$$a_{ts} = \alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \dots + \alpha_r a_{rs}.$$

Numerele $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sînt unic determinate pentru că formează soluția sistemului (11.2), care este un sistem Cramer; matricea coeficienților este ${}^tC$ și $\det {}^tC = \det C \neq 0$, prin ipoteză.

Deoarece $\det F = 0$, tot în baza teoremei din 10.3, avem și

$$b_t = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_r b_r.$$

Aceasta arată că în matricea B, pentru fiecare t, $r < t \leqslant m$, linia t este o combinație liniară de primele r linii, adică, pentru fiecare t, există r numere $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, astfel încît înmulțind în stînga și în dreapta semnului de egalitate cu α_1 la prima ecuație, cu α_2 la ecuația a doua, cu α_r la ecuația r și adunînd termen cu termen, obținem ecuația t. Rezultă că putem suprima ecuația t din sistemul (11.1), fără ca această operație să aibă urmări asupra soluției sistemului și aceasta pentru toți $t > r$.

În rezumat, dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} B = r$ și $\det C \neq 0$, sistemul (11.1) are aceeași soluție cu sistemul

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1r} x_r &= b_1 - a_{1,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2r} x_r &= b_2 - a_{2,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{2n} x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \dots + a_{rr} x_r &= b_r - a_{r,r+1} x_{r+1} - \dots - a_{rn} x^n \end{aligned}\right\} \qquad (11.3)$$

care se obține din (11.1) suprimînd ultimele $m-r$ ecuații superflue pentru că sînt combinații liniare de primele r și trecînd în partea dreaptă a semnului de egalitate termenii cu $x_{r+1}, \ldots, x_n$ (operație permisă).

Dar sistemul (11.3) are cel puțin o soluție, care se obține în modul următor: se dau valori arbitrare necunoscutelor $x_{r+1}, \ldots, x_n$ (dacă este cazul, adică dacă $r<n$) și apoi se rezolvă sistemul Cramer (11.3), care rezultă, în raport cu necunoscutele $x_1, \ldots, x_r$.

Exemplu. Fie sistemul

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \quad + x_3 &= 5 \\ x_1 + 0{,}5\, x_2 \quad - x_3 &= 4 \\ x_1 + 0{,}75\, x_2 + x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Avem

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & -1 \\ 1 & 0{,}75 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0{,}5 & -1 & 4 \\ 1 & 0{,}75 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

rang $A = 2$, rang $B = 3$.

Sistemul este incompatibil, ceea ce se vede și din faptul că adunînd ecuația a doua cu a treia înmulțită cu 2, obținem $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 18$, ceea ce este în contradicție cu prima ecuație.

Rezultatul obținut în acest paragraf se numește

Teorema rangului. *Condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul* (11.1) *să admită soluția este dată de relația*

$$\text{rang}A = \text{rang}B.$$

Altfel spus: *dacă* rang A = rang B, *sistemul* (11.1) *este compatibil* și reciproc.

Teorema rangului se mai numește teorema lui *Kroneker-Capelli*, sau *teorema lui Fontené-Rouché.*

Din cele arătate mai înainte, rezultă că dacă sistemul (11.1) este compatibil, pentru a obține toate soluțiile sale, trebuie procedat în modul următor. Însemnînd cu r rangul comun al matricelor A și B, se aleg r ecuații și r necunoscute ale sistemului (11.1) astfel încît matricea coeficienților celor r necunoscute din sistemul de ecuații alese să aibă determinantul diferit de zero. În sistemul celor r ecuații alese, se trec în partea dreaptă a semnului de egalitate toți termenii care conțin celelalte $n-r$ necunoscute. Dînd valori arbitrare necunoscutelor din partea dreaptă a semnului de egalitate și calculînd

apoi cu regula lui Cramer toate cele r necunoscute din partea stîngă, obținem toate soluțiile sistemului dat.

11.2. **Exemple.** 1. Sistemele Cramer (v. 10.1) sînt sisteme liniare particulare în care A este o matrice pătrată de rang egal cu ordinul, iar B este o matrice dreptunghiulară de același rang cu A.

2. Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - 9x_3 &= -24. \end{aligned}\right\}$$

În acest caz,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -9 & -24 \end{pmatrix}.$$

Deși numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor, sistemul nu este un sistem Cramer, căci $\det A = 0$; astfel regula lui Cramer nu se aplică în acest caz. Deoarece $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$, $\operatorname{rang} A = 2$. Aceasta înseamnă că ultima coloană a lui A este o combinație liniară de primele două.

Rezolvînd sistemul (11.2) $3x + 4y = 1$, $2x + 3y = 2$, se găsește $x = -5$, $y = 4$. Se verifică apoi că ultima linie se obține înmulțind pe prima cu -5, pe a doua cu 4 și făcînd suma. Astfel ecuația a treia se poate suprima. (Nu am mai verificat că $\operatorname{rang} B = 2$, ci am verificat direct că putem lăsa la o parte ecuația a treia).

Prin urmare, sistemul dat se poate scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 8 - x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 &= 4 + x_3 \end{aligned}\right\}.$$

O soluție a acestui sistem se găsește punînd $x_3 = 0$ și rezolvînd sistemul.

$$3x_1 + 2x_2 = 8, \quad 4x_1 + 3x_2 = 4.$$

(Să se găsească soluția și să se verifice pe sistemul dat).

Soluția generală se obține lăsînd pe x_3 nedeterminat ca parametru și rezolvînd sistemul în raport cu x_1 și x_2;

$$x_1 = 16 - 5x_3, \quad x_2 = -20 + 7x_3.$$

(Să se verifice această soluție în tustrele ecuațiile sistemului dat.)

3. Nu este nevoie să calculăm determinanții tuturor matricelor din mulțimea $\mathcal{M}$, ca să ne dăm seama dacă un sistem de ecuații liniare este sau nu compatibil. Astfel să considerăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 7x_2 - 11x_3 + 7x_4 - 4x_5 &= 5. \end{aligned}\right\}$$

Matricea A formată din coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2 şi x_3 are determinantul nul, dat determinantul matricei coeficienţilor lui x_1 şi x_2 din primele două ecuaţii este diferit de zero. Aceasta înseamnă că ultima linie a matricei A este o combinaţie liniară a primelor două. Şi, de fapt, rezolvînd sistemul

$$x + 2y = 1, \quad 2x - y = 7,$$

se găseşte soluţia $x = 3$, $y = -1$, care arată că linia a treia a lui A se obţine înmulţind prima linie cu 3, a doua cu -1 şi adunînd rezultatele. Ce se întîmplă dacă extindem aceste operaţii la ecuaţiile întîi şi a doua din sistemul dat?

Se găseşte că ecuaţia a treia se obţine înmulţind prima ecuaţie cu 3, a doua cu -1 şi adunîndu-le termen cu termen. Astfel, fără să calculăm toţi determinanţii de ordinul al treilea am constatat că putem lăsa la o parte ecuaţia a treia din sistem. Avem de rezolvat sistemul

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 2 + 3x_3 - x_4 + x_5 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 - 2x_3 + 4x_4 - x_5. \end{aligned}\right\}$$

Exerciţiu. Să se rezolve acest sistem în raport cu x_1 şi x_2 şi apoi să se verifice soluţia în toate ecuaţiile sistemului dat.

4. Fie sistemul

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= 3 \\ 2x + y &= -2 \\ 5x + y &= 19. \end{aligned}\right\}$$

Deşi numărul ecuaţiilor este mai mare decît numărul necunoscutelor, sistemul este compatibil, deoarece rang B = rang A (det B = 0). Deoarece $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, este destul să rezolvăm sistemul format de primele două ecuaţii, ecuaţia a treia fiind o combinaţie liniară a primelor două. Să se găsească această combinaţie liniară.

11.3. Exerciţii

1. Să se cerceteze dacă sînt compatibile următoarele sisteme şi, în caz afirmativ, să se scrie soluţia generală, verificînd-o:

a) $$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 7ax_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 9x_1 - 43x_2 - 11x_3 + 3x_4 &= -18 \end{aligned}\right\}$$

b) $$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - 11x_3 + 31x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

c) $$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}\right\}$$

d) $\left.\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 13x_4 &= 3 \end{aligned}\right\}$ (incompatibil).

e) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \end{aligned}\right\}$

f) $\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}$

2. Să se cerceteze următoarele sisteme după valorile pe care le pot lua parametrii:

a) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + \beta y + z &= 1 \\ x + y + \gamma z &= 1 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= 0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= abc \\ 3bcx + 2acy - abz &= 4abc. \end{aligned}\right\}$

R. b) Dacă $abc \neq 0$, soluția este unică; $a = 0$, $bc \neq 0 \Rightarrow x = 0$, y, z oarecare; $b = 0$, $ac \neq 0 \Rightarrow y = 0$, x, z arbitrare; $c = 0$, $ab \neq 0$, $z = 0$, x, y arbitrare; $a = b = 0$, sistemul dispare (nedeterminare completă). La fel în cazul $a = b = 0$ și în cazul $c = a = 0$.

11.4. **Sistemele de ecuații liniare omogene** sînt sisteme de forma

$$(H)\quad \left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Teorema rangului ne asigură că un astfel de sistem este compatibil, în mod necondiționat rang B = rang A (notațiile de la punctul precedent), deoarece ultima coloană a lui B fiind nulă, orice matrice din $\mathcal{N}$ cu determinantul nenul este cuprinsă și în $\mathcal{M}$.

Orice sistem omogen admite soluția nulă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Dacă rang $A = n$, *atunci sistemul* este un sistem Cramer și *admite numai soluția nulă*. Dacă rangul r al sistemului (H) este mai mic decît numărul necunoscutelor, atunci se pot alege arbitrar $n-r$ necunoscute și acestea se completează pînă la o soluție a sistemului cu valori pentru celelalte r necunoscute, care se găsesc rezolvînd un sistem Cramer.

Exemplu. Să considerăm un sistem (H) format din $n-1$ ecuații liniare ($m = n-1$) cu n necunoscute și să presupunem că rangul matricei coeficienților este $n-1$. Să notăm cu D_k determinantul matricei care se deduce din matricea coeficienților prin suprimarea coloanei coeficienților necunoscutei x_k; presupunem că $D_n \neq 0$. Trecem în partea dreaptă termenii cu x_n și aplicăm regula lui Cramer sistemului obținut. Avem

$$x_k = -x_n \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\,k-1} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k+1} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,k-1} & a_{n-1,k} & a_{n-1,k+1} & \ldots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}} =$$

$$= -x_n (-1)^{n-1-k} \frac{D_k}{D_n} = \frac{(-1)^{n-k} D_k x_n}{D_n} = \frac{(-1)^k D_k x_n}{(-1)^n D_n}.$$

Astfel

$$x_k = \frac{(-1)^{k-1} D_k}{(-1)^{n-1} D_n} x_n.$$

Dînd lui x_n o valoare arbitrară, rezultă determinate $x_1, \ldots, x_{n-1}$, care împreună cu x_n alcătuiesc o soluție a sistemului (H) (în cazul $m = n-1$ și rang $A = n-1$).

Verificare:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \frac{x_n}{(-1)^{n-1} D_n} \sum_k (-1)^{k-1} a_{ik} D_k =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} x_n}{D_n} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n} \end{vmatrix} = 0$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Uneori, soluţia găsită se scrie sub forma

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{-D_2} = \ldots = \frac{x_n}{(-1)^{n-1} D_n}.$$

§ 12. Metode de calcul numeric al soluţiilor unui sistem de ecuaţii liniare

12.1. Teoria determinanţilor este utilă pentru studiul sistemelor de ecuaţii liniare şi a soluţiilor acestora; în practică însă, pentru rezolvarea sistemelor liniare, sînt adesea avantajoase alte metode şi scheme de calcul. Una dintre acestea este *metoda eliminării.* Aceasta constă, precum se ştie, în a înlocui sistemul dat S de ecuaţii liniare cu altele echivalente, care se deduc din acestea înlocuind unele ecuaţii cu combinaţii liniare ale ecuaţiilor lui S, astfel încît una dintre necunoscute (de exemplu x_1) să apară numai în una dintre ecuaţiile sistemului. În sistemul obţinut ecuaţiile care nu cuprind pe x_1 formează un sistem analog cu cel dat, dar cu o necunoscută mai puţin; acest sistem se tratează la fel şi se ajunge iarăşi la un sistem S' în care una dintre necunoscutele rămase (x_2) figurează numai în una dintre ecuaţiile sistemului S', celelalte ecuaţii nemaicuprinzînd nici pe x_1, nici pe x_2.

Continuînd tot astfel, se ajunge la un sistem pentru care matricea coeficienţilor are elementele de sub diagonala principală, sau deasupra ei, egale cu 0.

Rezolvarea unui astfel de sistem se face uşor.

12.2. **Schema lui Gauss.** Metoda eliminării nu prezintă nici o dificultate teoretică, dar precizia rezultatului (pentru că este vorba de rezolvarea numerică deci cu o anumită aproximaţie a unui sistem de ecuaţii cu coeficienţi numerici) şi o economie de timp depind de organizarea calculului.

O idee mai precisă despre mersul calculelor la o maşină manuală se poate obţine din următorul exemplu, [2]:

$$\begin{aligned}
1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 &= 1{,}5471,\\
0{,}1582x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}1871x_4 &= 1{,}6471,\\
0{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 &= 1{,}7471,\\
0{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 &= 1{,}8471.
\end{aligned} \qquad (1)$$

Calculele se desfășoară după schema lui Gauss, cu alegerea coeficientului principal. Se scriu într-un tabel, ca cel alăturat, coeficienții și termenii liberi :

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1		1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2		0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3		0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490

În prima coloană figurează numărul de ordine al ecuației sistemului; coloana a doua se lasă liberă în primul formular. În coloanele 3, 4, 5, 6 se scriu coeficienții ecuației : în prima linie coeficienții primei ecuații, în a doua coeficienții celei de-a doua etc., în corespondență cu valorile lui i din prima coloană. În coloana însemnată cu b_i se trec termenii liberi ai ecuațiilor respective. În coloana însemnată cu s_i se trece suma coeficienților și termenilor liberi din fiecare ecuație. Aceasta servește pentru control.

O dată completat acest tabel, se alege acela dintre coeficienții necunoscutelor, care are cea mai mare valoare absolută ; îl vom numi *coeficientul principal.* În cazul de față este $a_{44} = 1{,}26710$, subliniat în tabel. Se împarte fiecare element din coloana termenului principal (în speță a_{i4}), la termenul principal și cîtul obținut se trece cu semnul schimbat în coloana a doua (cea însemnată cu m_i) și linia deîmpărțitului respectiv. Toate calculele se fac cu o zecimală în plus.

După această operație, formularul rezultă completat astfel :

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}		a_{i4}	b_i	s_i
1	−0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	−0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	−0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490

Acum se adună la fiecare linie i linia termenului principal înmulțită cu elementul m_i corespunzător și rezultatele se scriu într-un formular asemănător sau în continuare pe același formular. Linia care cuprinde termenul principal va rezulta formată numai din zerouri și de aceea nu se mai scrie.

De asemenea, coloana termenului principal va rezulta formată din zerouri, deci nu se mai scrie nici ea.

În cazul de față se obține următorul tabel:

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	−0,093353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	−0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398

În această schemă au fost trecute și valorile lui m_i care se obțin în etapa următoare. Verificarea calculelor se face adunînd pe linii $a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + b_i$ și comparînd cu s_i. Dacă rezultatul se înscrie între toleranțele aproximației cerute, atunci rezultatul se consideră acceptabil și se continuă calculele; dacă nu se încadrează în toleranțe, se repetă calculele. Mai departe, se reia procedeul de pînă acum: se alege elementul principal din ultimul tabel (în cazul de față, acesta este 1,17077) și se împart la el elementele coloanei din care face parte; cîturile obținute cu semnul schimbat se trec în coloana m_i și linia deîmpărțitului respectiv (ceea ce s-a și făcut în cazul de față). După aceasta se adună la fiecare linie linia termenului principal înmulțită cu elementul m_i corespunzător. Se face verificarea ca mai sus și se urmează, în același mod, mai departe, pînă se ajunge la o singură linie.

Observăm că toate calculele se pot scrie pe același formular, despărțind prin linii orizontale diferitele etape.

Astfel în ultimele două etape vom avea

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	−0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
1		1,06616				1,10944	2,17560

După ce au fost efectuate aceste operații, se consideră ecuațiile corespunzătoare liniei care conține elementul principal din fiecare etapă, procedînd de jos în sus; se obține un sistem echivalent (care are aceleași soluții) cu sistemul dat.

În cazul de față:

$$\begin{aligned}
&1{,}06616x_1 = 1{,}10944,\\
&0{,}10492x_1 + 1{,}11170x_2 = 1{,}20639,\\
&0{,}15436x_1 + 0{,}16281x_2 + 1{,}17077x_3 = 1{,}41604,\\
&0{,}23680x_1 + 0{,}24710x_2, + 0{,}25680x_3 + 1{,}26710x_4 = 1{,}84710.
\end{aligned} \tag{2}$$

Matricea acestui sistem este triunghiulară. Sistemul se rezolvă în cel mai simplu mod:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1{,}10944}{1{,}06616} = 1{,}04059,\\
x_2 &= \frac{1{,}20639 - 0{,}10492 \cdot 1{,}04059}{1{,}11170} = \frac{1{,}09721}{1{,}11170} = 0{,}98697,\\
x_3 &= \frac{1{,}41604 - 0{,}15436 \cdot 1{,}04059 - 0{,}16281 \cdot 0{,}98697}{1{,}17077} =\\
&= \frac{1{,}09473}{1{,}17077} = 0{,}93505,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$x_4 = \frac{1{,}84710 - 0{,}23680 \cdot 1{,}04059 - 0{,}24710 \cdot 0{,}98697 - 0{,}25680 \cdot 0{,}93505}{1{,}26710} =$$

$$= \frac{1{,}11669}{1{,}26710} = 0{,}88130.$$

Controlul rezolvării sistemului final se face tot cu ajutorlul coloanei s_i: înlocuind pe b_i cu s_i, trebuie să obținem x_{i+1} în locul lui x_i.

Proba finală a rezultatului se face înlocuind necunoscutele cu valorile obținute în sistemul dat. În cazul de față se obține în partea stîngă a ecuațiilor, în ordinea în care au fost scrise următoarele rezultate: 1,54711; 1,64712; 1,74710; 1,84711.

După cum se vede, acestea diferă de termenii liberi ai ecuațiilor respective cu mai puțin de două zecimale de ordinul cinci, ceea ce este acceptabil (elementele inițiale fiind date cu patru zecimale exacte). Alegînd ca element principal elementul cel mai mare în valoare absolută din matricea coeficienților, se obțin cei mai mici multiplicatori m_i și, prin urmare, cele mai mici erori posibile.

12.3. **Schema lui Jordan.** Rezolvînd sistemul după schema lui Gauss, la fiecare etapă numărul ecuațiilor sistemului scade cu o unitate, prin neglijarea ecuației care cuprinde coeficientul principal.

O variantă comodă a acestei scheme se obține considerînd în fiecare etapă toate ecuațiile din etapa precedentă; dar pentru ale-

gerea coeficientului principal, în etapa respectivă, nefolosind acelea dintre ecuaţii din care au fost deja aleşi coeficienţii principali.

Această variantă se numeşte *schema lui Jordan.*

Pentru sistemul de ecuaţii tratat după schema lui Gauss, calculele de rezolvare după schema lui Jordan se dispun astfel :

i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	s_i
1	−0,11759	1,11610	0,12540	0,13970	0,14900	1,54710	3,07730
2	−0,14766	0,15820	1,16750	0,17680	0,18710	1,64710	3,33670
3	−0,17923	0,19680	0,20710	1,21680	0,22710	1,74710	3,59490
4		0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	−0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
2	−0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	−0,21934	0,23680	0,24710	0,25680	1,26710	1,84710	3,85490
1	−0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
2		1,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	−0,14645	0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
4	−0,19015	0,20294	0,21139		1,26710	1,53651	3,21794
1		1,06616				1,10944	2,17560
2	−0,09841	0,10492	1,11170			1,20639	2,42301
3	−0,13037	0,13899		1,17077		1,23936	2,54912
4	−0,17163	0,18299			1,26710	1,30711	2,75720
1		1,06616				1,10944	2,17560
2			1,11170			1,09721	2,20891
3				1,17077		1,09472	2,26549
4					1,26710	1,11670	2,38380

Se vede că, procedînd după schema lui Jordan, se ajunge la un sistem de ecuaţii pentru care matricea coeficienţilor este redusă la forma diagonală.

Făcînd calculele la o maşină, sau în mod obişnuit, cel ma îmult timp se cheltuieşte pentru înmulţiri şi împărţiri. De aceea este important să ştim cîte operaţii de înmulţire şi împărţire sînt necesare pentru rezolvarea unui sistem dat de ecuaţii liniare.

Vom considera un sistem Cramer de n ecuaţii cu n necunoscute. Sînt mai întîi necesare $n-1$ împărţiri pentru calculul multiplicatorilor m_i în prima etapă. Pe lîngă acestea trebuie efectuate n înmulţiri ale elementelor liniei care cuprinde coficientul principal[1]) cu frecare din cei $n-1$ multiplicatori, în total $(n+1)(n-1) =$

[1]) Coeficientul principal însuşi nu se mai înmulţeşte.

$=n^2-1$ înmulțiri. Prin invesare, după schema lui Gauss, sînt necesare în prima etapă $n^2 + n - 2$ operații; în etapa a doua sînt necesare $(n-1)^2 + (n-1) - 2$; în etapa a treia $(n-2)^2 + (n-2) - 2$ etc. În total sînt necesare

$$\sum_{x=1}^{n} (x^2 + x - 2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 + \sum_{x=1}^{n} (x - 2) =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2n + \frac{n(n+1)}{2}$$

operații pentru reducerea matricei coeficienților la forma triunghiulară.

Pentru rezolvarea sistemului final mai sînt necesare încă

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

operații de înmulțire sau împărțire și tot atîtea pentru control. În total, pentru rezolvarea unui sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute sînt necesare

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n}{2}(n+1) - 2n = \frac{n}{3}(n^2 + 6n - 1)$$

operații. La acestea trebuie alăturate încă n^2 operații de înmulțire pentru controlul final.

Pentru rezolvarea unui sistem de n ecuații cu n necunoscute după schema Jordan sînt necesare $(n^3 + 4n^2 - n)/2$ operații de înmulțire sau împărțire (ceea ce la mașină este același lucru) și anume: $(n-1)(n+1) + n - 1$ operații în prima etapă, ca și la schema lui Gauss; $(n-1)n + n - 1$ operații în etapa a doua; $(n-1)(n-1) + n - 1$ în etapa a treia; ...; $(n-1)2 + n - 1$ în ultima etapă. După aceste operații sînt necesare n operații de împărțire pentru rezolvarea sistemului final și n operații de verificare; în total $(n^3 + 4n^2 - n)/2$ operații. Pentru controlul final al soluției mai sînt necesare încă n^2 operații, ca și la metoda lui Gauss.

Observăm că schema lui Gauss ca și schema lui Jordan poate fi folosită pentru calculul determinantului matricei coeficienților unui sistem Cramer; deci pentru calculul oricărui determinant.

Într-adevăr, după fiecare etapă, determinantul sistemului format de ecuațiile cu coeficienții principali și ecuațiile rămase este egal cu

determinantul sistemului inițial. Prin urmare, determinantul matricei coeficienților sistemului final este egal cu determinantul matricei coeficienților sistemului dat.

În sfîrșit, observăm că schema lui Jordan poate fi folosită pentru calculul inversei unei matrice pătrate cu coeficienți numerici.

Anume, fie (a_{ij}), $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, o matrice pătrată cu coeficienți numerici a_{ij}. Se consideră sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i, \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

și se rezolvă acest sistem după schema lui Jordan; se obține sistemul

$$x_k = \sum_{h=1}^{n} b_{hk}\, y_h, \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Matricele (a_{ij}) și (b_{hk}) sînt inverse una alteia.

Dacă matricea nu are inversă, sistemul respectiv nu este compatibil și reciproc.

II. ELEMENTE DE STRUCTURI ALGEBRICE. POLINOAME

§ 1. Mulţimi

1.1. În matematică, şi în alte ştiinţe, diferitele teorii şi teoreme privesc anumite colecţii care se numesc, în general, *mulţimi* : mulţimi de puncte, de drepte, de cercuri în geometrie; mulţimi de numere, de ecuaţii, de coeficienţi, de polinoame ş.a. în algebră etc.

Recapitulăm aici unele noţiuni şi notaţii legate de noţiunea de mulţime, care vor fi întîlnite în cele ce urmează.

Pentru a scrie că un element face parte dintr-o mulţime A, se foloseşte simbolul $a \in A$, care se citeşte: „elementul a aparţine mulţimii A" sau „a este un element al lui A"; negaţia acestui fapt se scrie $a \notin A$ şi se citeşte: „a nu aparţine lui A" sau „a nu este element al lui A".

Se numeşte *submulţime* sau parte a unei mulţimi A orice mulţime B, ale cărei elemente aparţin, toate, lui A. Pentru a scrie că B este parte a lui A, se foloseşte simbolul $B \subset A$, care se citeşte: „B inclus în A". Simbolul $\subset$ se numeşte simbolul de incluziune, iar relaţia $B \subset A$ se zice *relaţia de incluziune*. Negaţia propoziţiei $B \subset A$ se scrie $B \not\subset A$ şi se citeşte: „B nu este inclus în A".

Dacă avem, în acelaşi timp, relaţiile $B \subset A$ şi $A \subset B$, înseamnă că orice element al lui B aparţine lui A şi orice element al lui A este şi element al lui B; se spune, în acest caz, că A şi B *coincid* sau sînt *identice* şi se scrie $A = B$. Negaţia acestei propoziţii se scrie $A \neq B$, citindu-se „A *diferit* de B".

Părţile unei mulţimi M alcătuiesc o mulţime, numită *mulţimea părţilor lui* M şi care se notează cu simbolul $\mathcal{P}(M)$. Prin urmare, relaţia (de incluziune) $A \subset M$ şi relaţia (de apartenenţă) $A \in \mathcal{P}(M)$ exprimă aceeaşi situaţie, anume că A este o parte a lui M.

Părţile lui M se grupează în perechi complementare: dacă $A \subset M$, *complementara* lui A în M este mulţimea elementelor din M care nu aparţin lui A; se notează cu simbolul $\mathbf{C}_M A$; e clar că $\mathbf{C}_M(\mathbf{C}_M A) = A$.

Mulţimea M însăşi este şi ea un element al mulţimii $\mathcal{P}(M)$. Mulţimea $\mathbf{C}_M M$ este lipsită de elemente şi se numeşte *mulţimea vidă a lui* M. Mulţimea vidă este cuprinsă în orice mulţime, conform definiţiei relaţiei de incluziune. Prin urmare, mulţimea vidă este unică; se notează cu simbolul $\varnothing$.

Pentru a arăta că o mulţime M este formată din nişte elemente date sau caracterizate prin anume proprietăţi P_1, P_2 etc., se scrie

$$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}, \text{ respectiv } M = \{x, \mid P_1, P_2 \ldots\}.$$

Astfel, scriem $M = \{1, 2, 3\}$ pentru a indica mulţimea formată din primele trei numere naturale; $M = \{x \in N \mid 2 \mid x\}$ pentru a indica mulţimea numerelor naturale pare (divizibile cu 2); $M = \{p \in N \mid p \text{ prim}\}$ pentru a indica mulţimea numerelor naturale prime etc.

În particular, scriem $\{a\}$ pentru a indica mulţimea formată numai din elementul a.

Fie A şi B două părţi ale unei mulţimi M. Mulţimea elementelor, care aparţin atît lui A cît şi lui B, se numeşte *intersecţia* lui A cu B; se notează cu simbolul $A \cap B$. Aşadar

$$A \cap B = \{x \in M \mid x \in A \text{ şi } x \in B\}.$$

Dacă $A \cap B = \varnothing$, adică dacă A şi B nu au elemente comune, se zice că A şi B sînt *disjuncte*.

Mulţimea tuturor elementelor care aparţin fie lui A, fie lui B poartă numele de *reuniunea* lui A cu B; se notează cu simbolul $A \cup B$. Aşadar

$$A \cup B = \{x \in M \mid x \in A \text{ sau}^{*)} \ x \in B\}.$$

Mai general, să presupunem că avem o familie oarecare de mulţimi M_i însemnate cu indici i care parcurg o altă mulţime I. Mulţimea M formată cu elementele care aparţin cel puţin uneia dintre mulţimile M_i se numeşte *reuniunea mulţimilor* M_i; se scrie

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i.$$

Astfel, notînd cu P mulţimea tuturor polinoamelor f în variabila x, cu coeficienţi întregi şi notînd cu R_f mulţimea tuturor rădăcinilor polinomului f, reuniunea $\bigcup_{f \in P} R_f$ este mulţimea tuturor numerelor algebrice.

---

*) Aici conjuncţia sau este întrebuinţată cu nuanţă copulativă, în înţelesul că x aparţine cel puţin uneia din mulţimile A, B.

De asemenea, notînd cu A_n intervalul $n \leqslant x \leqslant n+1$, cu R mulțimea tuturor numerelor reale și cu I mulțimea tuturor numerelor întregi, putem scrie $R = \bigcup_{n \in I} A_n$ etc.

1.2. Produs de mulțimi. Relații de echivalență

1.2.1. În algebră intervin adesea mulțimi de perechi (a, b), formate din cîte un element a dintr-o mulțime M și un element b care parcurge o mulțime N, identică cu M sau diferită.

Astfel, elementele unei matrice A se notează cu o literă a_{ij} marcată cu o mulțime de perechi de indici (i, j), indicele i parcurge mulțimea $1, 2, \ldots, m$ a indicilor liniilor matricei A, iar j parcurge mulțimea $1, 2, \ldots, n$ a indicilor coloanelor matricei A.

Definiție. Fie A și B două mulțimi; *mulțimea tuturor perechilor* (a, b) *cu* $a \in A$ *și* $b \in B$ *se numește produsul mulțimilor* A, B și se notează cu simbolul $A \times B$. Uneori acest produs se mai numește și *produs cartezian*.

În același mod se definește și produsul $A \times B \times C$ a trei mulțimi A, B, C ca mulțimea tuturor sistemelor de cîte trei elemente (a, b, c) cu $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$ etc.

Mulțimile A, B se numesc *factorii* produsului $A \times B$.

1.2.2. *Relații binare într-o mulțime.* Să considerăm o mulțime M și produsul $M \times M$. Să presupunem că, printr-un mijloc oarecare, a fost fixată o parte R a produsului $M \times M$; în acest caz spunem că a fost definită *o relație binară* R în mulțimea M.

Mai precis, spunem că x și y se găsesc în relația R dacă și numai dacă perechea (x, y) aparține submulțimii R.

Exemple. a) Să presupunem că R este mulțimea tuturor perechilor de forma (x, x). Această submulțime a lui $M \times M$ se numește *diagonala produsului* $M \times M$; se notează cu Δ. Așadar, să presupunem că $R = \Delta$. În acest caz, x și y se găsesc în relația R dacă și numai dacă $y = x$. Astfel, diagonala produsului $M \times M$ definește relația de egalitate în mulțimea M.

b) Să luăm pentru M mulțimea Z a tuturor numerelor întregi. Elementele mulțimii $Z \times Z$ se pot figura în planul cartezian (planul geometriei analitice) ca punctele (x, y) de coordonate întregi.

Fie R mulțimea punctelor situate de aceeași parte cu punctul (0,1) față de prima bisectoare a unghiului format de axa absciselor cu axa ordonatelor (aceea de ecuație $x - y = 0$). În R vom include și punctele situate pe această bisectoare. În acest caz întregii x și y se găsesc în relația R dacă și numai dacă $(x, y) \in R$, adică dacă și numai dacă $x - y \leqslant 0$. Relația binară definită de mulțimea R în Z este relația de mărime: x și y se găsesc în relația R dacă și numai dacă $x \leqslant y$.

c) Fie din nou mulțimea Z a întregilor și să considerăm în $Z \times Z$ mulțimea R a tuturor perechilor (x, y) în care primul element x divide pe al doilea (pe y): $x \mid y$. În acest caz, relația definită de mulțimea R este *relația de divizibilitate în* Z.

Între relațiile binare care se întîlnesc în diferite mulțimi uzuale, cu deosebire importante sînt relațiile de echivalență și relațiile de ordine.

1.2.3. *Relații de echivalență.* Să presupunem că o mulțime dată M este împărțită în submulțimi (părți) A_i, fără elemente comune, astfel încît M să coincidă cu reuniunea submulțimilor A_i, $M = \bigcup_i A_i$ și $A_i \cap A_j = \varnothing$, $(i \neq j)$. Spunem că este dată *o partiție a mulțimii* M.

Exemplu. Elevii unei școli se împart în clase. Presupunînd că nici unul nu dă două clase într-un an, clasele nu au elemente comune și reuniunea lor coincide cu mulțimea tuturor elevilor din școală. Avem o partiție a mulțimii elevilor școlii în clase de învățătură.

1.2.4. Să considerăm în produsul $M \times M$ mulțimea $R = \bigcup_i (A_i \times A_i)$. Observăm următoarele proprietăți ale relației binare R, definită de submulțimea R:

a) Oricare ar fi $x \in M$, există un i astfel că $x \in A_i$, iar $(x, x) \in A_i \times A_i$. Adică, pentru orice $x \in M$, $(x, x) \in R$, deci x este în relația R cu el însuși. Exprimăm această proprietate spunînd: relația R este *reflexivă.*

b) Dacă $(x, y) \in R$, atunci și $(y, x) \in R$, deoarece mulțimea R este simetrică față de diagonala lui $M \times M$.

Mai explicit: condiția $(x, y) \in R = \bigcup_i A_i \times A_i$ înseamnă că există o parte A_i, astfel încît $(x, y) \in A_i \times A_i$; prin urmare, $x \in A_i$ și $y \in A_i$. Rezultă că $(y, x) \in A_i \times A_i$, deci $(y, x) \in R$. Această proprietate se enunță astfel: relația R este *simetrică.*

c) Să presupunem că $(x, y) \in R$ și $(y, z) \in R$. Înseamnă că există o parte A_i astfel că $(x, y) \in A_i \times A_i$ $(x \in A_i,\ y \in A_i)$ și că există o parte A_j astfel că $(y, z) \in A_j \times A_j$ $(y \in A_j, z \in A_j)$. Cum două părți distincte A_i și A_j nu au elemente comune, din relațiile $y \in A_i$ și $y \in A_j$ rezultă că A_i *coincide* cu A_j; astfel $(y, z) \in A_i \times A_i$, adică $z \in A_i$. Aceasta ne spune că $(x, z) \in A_i \times A_i$; prin urmare $(x, z) \in R$. Altfel spus: dacă x și y sînt în relația R și dacă y și z sînt și ele în relația R, atunci x și z sînt în relația R.

Un alt mod de a enunța această proprietate este următorul: relația R este *tranzitivă.*

Astfel, în exemplul de mai sus, R este mulțimea tuturor perechilor de elevi, colegi de clasă.

Proprietatea c) spune că dacă x și y sînt colegi de clasă și dacă și y și z sînt colegi de clasă, atunci x și z sînt colegi de clasă.

Deci relația R definită de partiția $\{A_i\}$ a lui M este a) reflexivă, b) simetrică și c) tranzitivă.

Reciproc: orice relație binară S în M, care are proprietățile a), b), c), definește o partiție a mulțimii M (o împărțire a lui M în submulțimi A_i disjuncte, astfel încît orice element din M aparține uneia dintre submulțimile A_i).

Submulțimile care formează partiția definită de relația S se definesc în modul următor: pentru fiecare element x din M se consideră mulțimea A_x formată de elementele y, care se găsesc în relația S cu x. E clar că $x \in A_x$ (deoarece S este reflexivă). Rezultă apoi că dacă y aparține lui A_x, adică dacă y este în relația S cu x, în mod necesar $A_y \subset A_x$ (relația S fiind tranzitivă). Mai mult, relația S fiind simetrică, rezultă că și x este în relația S cu y, deci $x \in A_y$; prin urmare și $A_x \subset A_y$: dacă y aparține lui A_x, neapărat $A_y = A_x$. Altfel spus: dacă x și y sînt în relația S, avem obligatoriu $A_x = A_y$.

Mai departe, dacă mulțimile A_x și A_z au un element comun, ele coincid, în mod necesar: dacă $y \in A_x \cap A_z$, atunci $A_x = A_y = A_z$. Astfel mulțimea M rezultă împărțită în submulțimile A_x, definite de relația S; două elemente x și y sînt în relația S dacă și numai dacă aparțin aceleiași submulțimi A_x, adică dacă și numai dacă perechea (x, y) aparține mulțimii $\bigcup_{x \in M} (A_x \times A_x)$. (Semnul $\bigcup_{x \in M} B_x$ se citește „reuniunea mulțimilor B_x pentru toți x din M”. Să notăm cu S mulțimea $\bigcup_{x \in M} (A_x \times A_x)$. Rezultă că S nu este altceva decît relația binară definită mai sus de împărțirea lui M în submulțimile A_x.

Exemple. Să considerăm un punct O în planul P și să considerăm următoarea relație S între punctele planului P: punctele x și y sînt în relația S dacă sînt egal depărtate de O.

E clar că această relație este reflexivă (x și y sînt la aceeași distanță de O), simetrică (dacă x și y sînt echidistanțe de O, y și x au aceeași proprietate) și tranzitivă (dacă x și y sînt la aceeași distanță de O și dacă y și z sînt la aceeași distanță de O, atunci x și z sînt la aceeași distanță de O ca și y).

Prin urmare, relația S definește o împărțire a planului în submulțimi A_x: A_x sînt cercurile cu centrul în O. Două cercuri cu centrul în O nu au puncte comune, dacă sînt diferite, și orice punct din plan aparține unui cerc cu centrul în O.

Definiție. *Orice relație R între elementele unei mulțimi M, care are proprietățile*: a) *de reflexivitate*, b) *de simetrie și* c) *de tranzitivitate, se numește relație de echivalență.*

O relație de echivalență R definește o împărțire a lui M în *clase de echivalență modulo* R*), iar clasele de echivalență mod R sînt elementele unei noi mulțimi, care se numește *factorizarea* (împărțirea) *lui M prin R* și se notează cu simbolul M/R.

Un alt mod de a spune că x și y se găsesc în relația de echivalență R este acesta: x este echivalent cu y mod R; se scrie $x \sim y$ mod R. Astfel, factorizarea planului prin relația de echivalență S din exemplul precedent este mulțimea ale cărei elemente sînt cercurile din plan cu centrul în O. Această mulțime este în corespondență bijectivă cu mulțimea punctelor unei semidrepte Δ cu originea în O, prin

*) Se scrie mod R.

aplicaţia cerc $\to$ punctul de intersecţie al cercului cu Δ sau cu mulţimea numerelor reale nenegative, prin aplicaţia cerc A (cu centrul în O) $\to$ raza cercului A.

Adesea mulţimea factor se reprezintă printr-o submulţime a lui M formată prin alegerea cîte unui element din fiecare clasă; asemenea elemente se numesc *reprezentanţi*. Astfel în exemplul precedent, punctele unei semidrepte cu originea în O în planul P formează un sistem de reprezentanţi pentru clasele de echivalenţă mod S (cercurile cu centrul în O).

Aplicaţia $M \to \frac{M}{R}$, care asociază fiecărui element x din M clasa sa de echivalenţă mod R, în $\frac{M}{R}$, se numeşte aplicaţia canonică a lui M pe $\frac{M}{R}$.

Orice aplicaţie $f: M \to N$ a unei mulţimi M în altă mulţime N (care poate să şi coincidă cu M) defineşte o relaţie de echivalenţă R, anume: x şi y sînt în relaţia R dacă şi numai dacă $f(x) = f(y)$.

Clasele de echivalenţă modulo această relaţie R sînt mulţimi de forma $\{x \in M \mid f(x) = z \in N\}$; astfel de mulţimi se notează cu simbolul $f^{-1}(z)$ şi se numesc imagini inverse prin f.

1.2.5. Exerciţii

1. Fie Z inelul întregilor, iar în $Z \times Z$ să considerăm mulţimea R a perechilor (x, y) cu proprietatea că $x - y$ este divizibil cu 3. I) Să se arate că această mulţime defineşte o relaţie de echivalenţă R în Z. II) Care sînt clasele de echivalenţă?

R. I) R este reflexivă căci $3 \mid x - x = 0$, oricare ar fi $x \in Z$; R este simetrică: dacă $3 \mid (x-y)$, $3 \mid (y-x)$; R este tranzitivă: dacă $3 \mid (x - y)$ şi $3 \mid (y - z)$, atunci $3 \mid (x-z)$.

II) Clasele de echivalenţă sînt: A_0, formată din numerele divizibile cu 3; A_1, formată din numerele x pentru care $3 \mid (x - 1)$ (numerele care dau restul 1 prin împărţirea cu 3); A_2, formată din numerele y pentru care $3 \mid (y - 2)$.

Să se dea şi alte exemple de relaţii de echivalenţă, asemănătoare cu acestea.

2. Fie Q corpul numerelor raţionale, iar în $Q \times Q$ să considerăm mulţimea S a perechilor (x, y) cu proprietatea că $x - y$ este întreg. I) Să se arate că mulţimea S defineşte o relaţie de echivalenţă S. II) Care sînt clasele de echivalenţă mod S?

R. I) Se verifică reflexivitatea, simetria şi tranzitivitatea relaţiei S, ca şi la exerciţiul 1. De exemplu, tranzitivitatea: dacă $x - y$ şi $y - z$ sînt întregi, atunci şi suma lor $x - z$ este întreg. II) Clasele de echivalenţă formează o mulţime care se găseşte în corespondenţă bijectivă cu mulţimea numerelor raţionale r din intervalul $0 \leqslant r < 1$.

3. Se consideră un sistem de coordonate în plan şi următoarea relaţie între punctele planului: punctul p de coordonate x, y şi punctul p' de coordonate x', y' se găsesc în relaţia R dacă şi numai dacă $xy = x'y'$.

1) Să se arate că relaţia R este o relaţie de echivalenţă.

2) Care sînt clasele de echivalenţă mod R?

Indicaţie: 1) Se va arăta că R este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. 2) Clasele sînt hiperbolele $xy = a$, a fiind real.

4. Aceeaşi problemă pentru relaţia S definită în modul următor: P şi Q sînt în relaţie S dacă şi numai dacă $x^2 - y = x'^2 - y'$.

5. Relaţia T definită astfel: P şi Q sînt în relaţia T dacă şi numai dacă $xy' = x'y$ este relaţia de echivalenţă?

R. Nu, căci nu este tranzitivă: orice punct este în relaţia T cu originea (0, 0); dar (1,2) şi (2,1), spre exemplu, nu sînt în relaţia T.

6. Care sînt clasele de echivalenţă mod T dacă, în exerciţiul precedent, considerăm relaţia T *nu* în tot planul, ci în mulţimea care rămîne dacă din plan înlăturăm punctele interioare unui cerc cu centrul în origine şi cu raza 1?

R. Dreptele care trec prin punctul (0, 0) sau, mai precis, ceea ce rămîne dacă din ele lăsăm la o parte porţiunea cuprinsă în cercul din enunţ.

7. În mulţimea numerelor complexe, se consideră următoarea relaţie R: numerele z şi z' sînt în relaţia R dacă şi numai dacă $|z| = |z'|$. 1) Să se arate că R este o relaţie de echivalenţă. 2) Care sînt clasele de echivalenţă mod R?

8. Să considerăm funcţia $f(x) = x^2 - 2x$, definită pe mulţimea numerelor reale. Care este relaţia de echivalenţă R pe care o defineşte această funcţie? Care sînt clasele de echivalenţă?

R. Numerele x şi y sînt în relaţia R dacă şi numai dacă $x^2 - 2x = y^2 - 2y$; această condiţie se scrie sub forma $x^2 - y^2 = 2(x - y)$ şi este totuna cu $x - y = 0$ sau $x + y = 2$; prin urmare „x şi y sînt în relaţia R" este acelaşi lucru cu: „$x = y$ sau $x + y = 2$". Fiecare clasă este constituită din două puncte: x şi $2 - x$; clasa care cuprinde punctul 1 este formată din acest punct considerat de două ori, 1 şi $2 - 1 = 1$.

9. Aceeaşi problemă pentru funcţia $g(x) = x^2 - 2$.

10. Aceeaşi problemă pentru funcţia $h(x) = |x| - 1$.

11. Să se arate că în mulţimea numerelor reale funcţiile $f(x) = 2x^4$ şi $g(x) = x^2 - 1$ definesc aceeaşi relaţie de echivalenţă. Se poate spune acelaşi lucru în mulţimea numerelor complexe? Care sînt clasele de echivalenţă, adică mulţimile imagini inverse pentru aceste funcţii: 1° în real, 2° în complex?

R. În real, relația $2x^4 = 2x'^4$ este totuna cu relația $x^2 - 1 = x'^2 - 1$. În real, fiecare clasă de echivalență este formată dintr-un număr x și opusul său $-x$.

În complex, dacă punem $z = f(x)$, $f^{-1}(z)$ este o mulțime formată din patru puncte: $x, -x, ix, -ix$; pe cînd $g^{-1}(u)$ este formată numai din punctele $x, -x$; punem $u = g(x)$. În complex, cele două funcții nu mai definesc aceeași relație de echivalență.

12. Care este relația de echivalență definită de funcția $f(x) = \sin \pi x$, în mulțimea numerelor reale?

R. $f^{-1}(x) = \{(-1)^n x + n,\ n \in Z\}$.

13. Să notăm cu $[x]$ cel mai mare întreg cuprins în numărul x; de exemplu $[2,5] = 2, [\sqrt{2}] = 1$ etc. Care este relația de echivalență R definită de funcția $f(x) = [x]$, în mulțimea Q a numerelor raționale? Care sînt clasele de echivalență mod R?

Indicație. x și y sînt în relația R dacă și numai dacă au aceeași parte întreagă.

14. Care este relația de echivalență în R definită de funcția $g(x) = x - [x]$?

Indicație. x și y sînt echivalente dacă au aceeași parte zecimală.

1.3. Relații de ordine

Definiție. I. O relație binară R între elementele unei mulțimi M se numește *relația de preordine* în M dacă este reflexivă (dacă xRx pentru orice x din M) și tranzitivă (dacă din xRy și yRz rezultă obligatoriu xRz).

Astfel: orice relație de echivalență în M este o relație de preordine în această mulțime; în particular relația de egalitate ($x = y \Leftrightarrow x$ coincide cu y) este o relație de preordine; relația de divizibilitate în inelul întregilor raționali Z ($x|y \Leftrightarrow z \in Z$ astfel încît $y = xz$) este o relație de preordine.

II. O relație de preordine R în M se numește *relația de ordine* dacă îndeplinește și condiția de *antisimetrie*: xRy și yRx implică x identic cu y.

Astfel, relația de egalitate este o relație de ordine, relația de divizibilitate în mulțimea N a numerelor naturale este o relație de ordine; relația de divizibilitate în mulțimea Z a numerelor întregi este o relație de preordine dar *nu* este o relație de ordine (din $a|b$, $b|a$ nu rezultă $a = b$ ci doar $a = \pm b$). Relația de incluziune, în mulțimea $\mathcal{P}(M)$ care are drept elemente părțile unei mulțimi M, este o relație de ordine.

Teoremă. *Dacă R este o relație de preordine în mulțimea M, atunci relația $x\,R\,y$ și $y\,R\,x$ este o relație de echivalență în această mulțime.*

Demonstrație. Condițiile de reflexivitate, tranzitivitate și simetrie sînt verificate în mod evident în acest caz.

Să notăm cu E relația de echivalență definită în acest mod de R. Se poate arăta că din relația de preordine R, pe mulțimea $\frac{M}{E}$, se definește în mod canonic o relație de ordine S. În acest scop, facem următoarea

Observație. Fie ξ și η două elemente din $\frac{M}{E}$. Există x și y în M astfel încît, notînd cu f aplicația canonică $M \to M/E$, să putem scrie $\xi = f(x)$, $\eta = f(y)$. Să presupunem că are loc relația $x\,R\,y$. Dacă x' este un alt element din M pentru care $f(x') = \xi$, rezultă $x'\,R\,x$ (și $x\,R\,x'$); prin urmare are loc și relația $x'\,R\,y$.

Astfel relația $x\,R\,y$ se menține cînd înlocuim pe x cu orice element echivalent cu el modulo E și de asemenea se menține cînd înlocuim pe y cu orice element echivalent cu y modulo E. Pentru acest motiv se spune că relația de echivalență E este compatibilă cu relația R.

Să considerăm acum în M/E relația $\xi\,S\,\eta$ definită prin condiția echivalentă: există $x \in M$ și $y \in M$ astfel încît să fie $\xi = f(x)$, $\eta = f(y)$ și $x\,R\,y$.

Relația S este o relație de ordine. Într-adevăr, ea este reflexivă: $\xi\,S\,\eta$ pentru orice $\xi \in M/E$, deoarece există $x \in M$ pentru care $\xi = f(x)$ și $x\,R\,x$.

Relația S este tranzitivă: din $\xi_1\,S\,\xi_2$ și $\xi_2\,S\,\xi_3$ rezultă $\xi_1\,S\,\xi_3$ deoarece există $x_i \in M$, $(i = 1, 2, 3)$, astfel încît $\xi_i = f(x_i)$ și $x_1\,R\,x_2$, $x_2\,R\,x_3$; prin urmare $x_1\,R\,x_3$. Din $\xi_1\,S\,\xi_2$, $\xi_2\,S\,\xi_1$ rezultă $\xi_1 = \xi_2$, aceasta pentru că există $x_i \in M$, $(i = 1, 2)$, astfel încît $\xi_i = f(x_i)$ și $x_1\,R\,x_2$, $x_2\,R\,x_1$; prin urmare $x_1\,E\,x_2$ de unde $\xi_1 = f(x_1) = f(x_2) = \xi_2$. Toate acestea demonstrează că S este într-adevăr o relație de ordine; *S se numește relația de ordine, în M/E, asociată relației de preordine R.*

Astfel relației de divizibilitate în inelul Z al întregilor i se asociază o relație de ordine între clasele de întregi asociați (întregii u și v se zic asociați dacă $u \mid v$ și $v \mid u$, ceea ce este totuna cu $|u| = |v|$); această relație de ordine corespunde relației de divizibilitate în mulțimea N a numerelor naturale.

O altă relație de ordine în mulțimea N a numerelor naturale în care se consideră cuprins și zero este relația obișnuită $\leqslant$ definită prin $x \leqslant y \Leftrightarrow$ există $z \in N \cup \{0\}$ astfel că $y = x + z$. În analogie cu acest exemplu de relație de ordine, semnul $\leqslant$ se folosește și pentru celelalte relații de ordine, în locul semnelor R, S, cînd nu este pericol de confuzie.

În analogie şi cu limbajul folosit pentru relaţia de ordine $\leqslant$ din mulţimea numerelor naturale, pentru a exprima că $x \leqslant y$ într-o mulţime M, pentru o relaţie de ordine din M, pe care o notăm cu $\leqslant$ spunem : *x precede pe y* sau *x este mai mic decît y* sau *x este inferior lui y*, sau *y* urmează pe *x*, *y* e mai mare ca *x*, *y* superior lui *x*, în relaţia de ordine considerată.

Pentru anumite relaţii de ordine speciale şi uzuale, se folosesc semne şi expresii speciale ca $\subset$ (inclus) sau | (divizibil) etc. În notaţia adoptată $\leqslant$ relaţia $x < y$ este echivalentă cu $x \leqslant y$ şi $x \neq y$ şi se citeşte „*x* strict mai mic decît *y*"; relaţia $x \leqslant y$ este logic echivalentă cu $x < y$ sau*) $x = y$.

Pentru a exprima că într-o mulţime ordonată M. două elemente x şi y se găsesc în relaţia de ordine considerată, adică $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$, spunem că x şi y sînt *comparabile* în acea relaţie de ordine.

O mulţime ordonată M, ale cărei elemente sînt toate comparabile două cîte două, se zice *total ordonată* sau *liniar ordonată* iar *relaţia de ordine* respectivă se zice *totală* sau *liniară*. Mulţimile numerelor naturale cu relaţia de mărime obişnuită este total ordonată. O mulţime ordonată care nu este total ordonată se zice *parţial* ordonată, iar relaţia de ordine respectivă se numeşte relaţia de ordine *parţială*. Relaţia de divizibilitate în mulţimea numerelor naturale este o relaţie de ordine parţială.

Orice relaţie de ordine într-o mulţime ordonată M induce o relaţie de ordine pe orice submulţime N a lui M. Cînd se vorbeşte de N ca submulţime ordonată a lui M, se înţelege că relaţia de ordine în N la care ne referim este cea indusă de relaţia de ordine considerată în M. Mulţimea N poate fi total ordonată, fără ca M să fie total ordonată. Astfel mulţimea puterilor unui întreg este total ordonată, ca submulţime a mulţimii numerelor naturale ordonată cu relaţia de divizibilitate.

§ 2. Legi de compunere

2.1. Fiind dată o mulţime M, se numeşte *lege* (sau operaţie) *de compunere* în M orice aplicaţie $p : M \times M \to M$.

Astfel, adunarea este o lege de compunere în mulţimea N a numerelor naturale; înmulţirea este o altă lege de compunere în aceeaşi mulţime.

Este firesc să considerăm şi aplicaţii ale produsului $M \times M \times M$ în M, precum şi aplicaţii ale unui produs de mai mulţi factori, identici cu M, în M. În mod obişnuit, se consideră mai ales legi de com-

*) sau copulativ.

punere *binară*, adică aplicații ale produsului $M \times M$ în M și *acestea* se numesc, fără altă precizare, *legi de compunere*.

Adesea se consideră două mulțimi A și M și o aplicație $f : A \times M \to M$; o asemenea aplicație se numește *lege de compunere externă*, definită pe $A \times M$ cu valori în M. În opoziție cu legile externe de compunere, legile de compunere $M \times M \to M$, considerate la început, se numesc *legi de compunere interne* sau, mai scurt, *legi de compunere*.

O mulțime M, considerată împreună cu o lege de compunere (sau cu mai multe legi de compunere, dintre care unele pot să fie interne, iar altele externe) se numește *structură algebrică*.

Vom considera mai întîi structuri algebrice cu o singură lege de compunere (internă). În asemenea structuri, elementul $p(x, y)$ se notează cu $x \circ y$ sau $x \cdot y$ sau, mai simplu xy; asemenea notație se zice *multiplicativă*, deși, în general nu este vorba de o înmulțire în înțelesul obișnuit al cuvîntului. Așa se notează înmulțirea numerelor naturale, înmulțirea întregilor, înmulțirea numerelor rționale, a numerelor reale, a numerelor complexe, a matricelor, compunerea permutărilor etc.

În alte cazuri, elementul $p(x, y)$ se notează cu $x + y$, ca *adunarea* numerelor naturale, a numerelor întregi, a numerelor raționale, a numerelor reale, adunarea numerelor complexe, adunarea matricelor etc.

Cînd legea de compunere se scrie $(x, y) \to p(x, y) = x + y$ sau $(x, y) \to x + y$, zicem că legea de compunere se scrie *aditiv*. Scrierea aditivă se folosește, de obicei, pentru legile de compunere *comutative*, care satisfac relația $p(x, y) = p(y, x)$ pentru orice x și orice y din M.

O lege de compunere $(x, y) \to xy$ se zice *asociativă* dacă satisface condiția

$$(xy)z = x(yz),$$

oricare ar fi elementele x, y și z din mulțimea M. În această relație am notat cu (xy) elementul xy din M și la fel, (yz) înseamnă elementul yz din M.

Astfel, adunarea în mulțimea numerelor naturale este o lege de compunere asociativă. Scăderea în mulțimea Z a întregilor raționali este o lege de compunere, dar nu este asociativă.

2.2. Dacă o lege de compunere $(x, y) \to xy$ într-o mulțime M este asociativă, expresiile $x_1x_2x_3$, $(x_j \in M)$, au un înțeles bine determinat, anume $x_1x_2x_3 = x_1(x_2x_3) = (x_1x_2)x_3$.

Prin recurență, se definește elementul $x_1x_2 \ldots x_n$ pentru n elemente $x_1, \ldots, x_n$ după formula

$$x_1x_2 \ldots x_n = (x_1x_2 \ldots x_{n-1})x_n.$$

Teorema 1 (generală de asociativitate). *Fie* $(x, y) \to xy$ *o lege de compunere asociativă într-o mulțime* M; *fie* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *un șir de elemente din* M *și* $h_1, h_2, \ldots, h_m$ *întregi naturali pozitivi îndeplinind condițiile* $1 = h_1 < h_2 < \ldots < h_m \leqslant n$, $(m \leqslant n)$. *Dacă punem* $a_1 \ldots a_{h_2-1} = b_1$, $a_{h_2} \ldots a_{h_3-1} = b_2, \ldots, a_{h_m} \ldots a_n = b_m$, *atunci are loc egalitatea*

$$a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 \ldots b_m.$$

Demonstrația acestei teoreme se face prin inducție asupra lui n. Pentru $n = 1$, egalitatea este evidentă. Să o presupunem adevărată pentru orice șir de elemente $a_1, \ldots, a_p$ cu $p \leqslant n - 1$.

Să considerăm mai întîi cazul în care $b_m = a_n$. În acest caz, factorii $a_1, \ldots, a_{n-1}$ sînt grupați în produsele de factori $b_1, \ldots, b_{m-1}$ și, prin ipoteza de inducție, avem $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = b_1 \ldots b_{m-1}$.

Prin urmare, $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n = (a_1 \ldots a_{n-1}) a_n = (b_1 \ldots b_{m-1}) b_m = b_1 \ldots b_m$, conform definiției produsului de un număr oarecare de factori.

Fie apoi $h_m < n$, $(h_m \neq n)$. Înseamnă că putem scrie $b_m = b'_m a_n$ (b_m are cel puțin doi factori) și că $m < n$. Observăm că $b'_m = a_{h_m} \ldots a_{n-1}$; prin urmare, în cazul $h_m \neq n$, $b_1 \ldots b_m = (b_1 \ldots b_{m-1})(b'_m a_n) = ((b_1 \ldots b_{m-1}) b'_m) a_n$, în baza asociativității legii de compunere. Dar $(b_1 \ldots b_{m-1}) b'_m = b_1 \ldots b'_m$ după definiția produsului de un număr oarecare de factori. Conform ipotezei de inducție, avem apoi

$$b_1 \ldots b'_m = a_1 \ldots a_{n-1}.$$

Astfel putem scrie

$$b_1 \ldots b_m = (b_1 \ldots b'_m) a_n = (a_1 \ldots a_{n-1}) a_n = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

ceea ce demonstrează teorema.

2.3. *Definiție.* Se numește *element neutru* pentru o lege de compunere $(x, y) \to xy$, în mulțimea M un element $u \in M$, care pentru orice $x \in M$, verifică relațiile

$$xu = ux = x.$$

Exemple. 1) În mulțimea Z a întregilor raționali, considerată cu adunarea ca lege de compunere, 0 este element neutru. În aceeași mulțime, considerată cu înmulțirea ca lege de compunere, 1 este element neutru.

2) Observațiile din exemplul precedent rămîn valabile dacă înlocuim mulțimea Z cu mulțimea Q a numerelor raționale; cu mulțimea R a numerelor reale sau cu mulțimea Z a numerelor complexe.

3) În mulțimea $\mathcal{P}(M)$ a părților unei mulțimi M, considerată cu intersecția ca operație de compunere, mulțimea M însăși este element neutru. În aceeași mulțime $\mathcal{P}(M)$, considerată cu reuniunea ca operație de compunere, mulțimea vidă $\varnothing$ este element neutru

Fiind dată o lege de compunere într-o mulțime M, poate să existe element neutru pentru acea lege de compunere, dar se poate ca un asemenea element să nu existe.

Astfel, în mulțimea numerelor naturale mai mari ca 2 nu există element neutru pentru înmulțire.

De asemenea, în mulțimea N a tuturor întregilor naturali (excludem pe 0) operația care asociază fiecărei perechi (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor x și y este o lege de compunere fără element neutru (nu există număr natural divizibil prin toate numerele naturale); operația, care asociază fiecărei perechi (x, y) numărul $[x, y]$, c.m.m.m.c. al numerelor x și y, este o lege de compunere cu element neutru ($[x, 1] = x$ pentru orice $x \in N$; 1 este element neutru pentru această lege de compunere).

Teorema 2 (de unicitate a elementului neutru). *Dacă într-o mulțime M, considerată cu o lege de compunere, există un element neutru, atunci există unul singur.*

Într-adevăr, presupunînd că u și v sînt elemente neutre în M, pentru legea de compunere $(x, y) \to xy$, deducem

$$u = uv = vu = v.$$

2.4. Exerciții

1. În mulțimea Z a numerelor întregi se consideră următoarele legi de compunere:

$$\alpha)\ (a, b) \to ab,$$

$$\beta)\ (a, b) \to ab^2,$$

$$\gamma)\ (a, b) \to a + b,$$

$$\delta)\ (a, b) \to a - b.$$

Care dintre aceste legi este asociativă și care nu este?

R. $\alpha)$ și $\gamma)$ sînt asociative; $\beta)$ și $\delta)$ nu sînt.

2. În mulțimea R a numerelor reale diferite de zero, se consideră următoarele legi de compunere:

$$\alpha)\ (x, y) \to xy,$$

$$\beta)\ (x, y) \to x/y,$$

$$\gamma)\ (x, y) \to \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Care dintre ele este asociativă? Care are element neutru?

R. α) şi γ); α).

3. În mulţimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ aplicaţiile

$$\text{a) } (A, B) \to A + B, \qquad \text{b) } (A, B) \to AB$$

sînt legi de compunere asociative; au şi element neutru?

R. Element neutru are numai adunarea a).

§ 3. Semigrupuri

3.1. O mulţime M împreună cu o lege de compunere asociativă se numeşte *semigrup*.

Exemple. a) Mulţimea N a numerelor naturale împreună cu adunarea este un semigrup.

b) De asemenea, N împreună cu înmulţirea este un semigrup.

c) Aceeaşi mulţime N, împreună cu operaţia de compunere $(x, y) \to x^2 y$ nu este semigrup, căci operaţia nu este asociativă:

$$(x^2y)^2 z \neq x^2 (y^2 z).$$

d) Alt semigrup important este următorul. Fie M o mulţime oarecare şi S mulţimea tuturor funcţiilor definite pe M şi cu valori tot în M. Să considerăm în S legea de compunere obişnuită (f, g), $g \circ f$ unde f şi g sînt funcţii din S, iar $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, pentru orice $x \in M$. Această lege de compunere este asociativă: dacă h este o altă funcţie din S, atunci $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f)(x))$ şi $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$, pentru orice $x \in M$, ceea ce tocmai arată asociativitatea compunerii.

3.2. Un element e dintr-un semigrup S se numeşte element neutru dacă satisface ecuaţia

$$ae = ea = a,$$

pentru orice element a din S, adică dacă este element neutru pentru legea de compunere a semigrupului.

Exemple. 1) Astfel, în semigrupul aditiv N al numerelor naturale (fără zero), din exemplul a) nu avem element neutru; dacă în N includem şi pe 0, avem element neutru.

2) În semigrupul multiplicativ N din exemplul b) elementul neutru este 1.

3) În semigrupul S din exemplul d) elementul neutru este funcţia identică e, care satisface condiţia $e(x) = x$, pentru orice $x \in M$.

4) Să considerăm mulţimea E a matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

în care x şi y sînt numere întregi. Mulţimea E, împreună cu înmulţirea matricelor ca lege

de compunere, este un semigrup, fără element neutru. Observăm că matricele $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$ sînt neutre, dar numai la dreapta:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix},$$

dar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ zx & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix}.$$

Din definiția elementului neutru rezultă (după cum a și fost demonstrat pentru o operație de compunere oarecare) că acesta este *unic*. Un semigrup care are element neutru se numește *monoid*.

3.3. Un semigrup S se zice *comutativ* sau *abelian* dacă îndeplinește condiția (de comutativitate) $ab = ba$, pentru orice $a \in S$ și $b \in S$.

Exemple. Semigrupurile din exemplele precedente 1) și 2) sînt comutative; semigrupurile S și E din exemplele 3) și 4) nu sînt comutative.

Teorema 3 (teorema generală de comutativitate). *Fie S un semigrup comutativ și $a_1, \ldots, a_n$ un șir finit de elemente din S, iar p o permutare a mulțimii $1, \ldots, n$. În aceste condiții are loc egalitatea*

$$a_1 \ldots a_n = a_{p(1)} \ldots a_{p(n)}.$$

Altfel spus: *într-un semigrup comutativ este indiferentă ordinea factorilor într-un produs.*

Demonstrația se face prin inducție asupra lui n. Dacă $n = 2$, afirmația este evidentă; vom presupune că $n > 2$ și că teorema este adevărată pentru un șir de cel mult $n-1$ elemente.

Sînt de deosebit două cazuri:

I. Cazul în care $p(n) = n$. În acest caz, prin ipoteza de inducție,

$$a_1 \ldots a_{n-1} = a_{p(1)} \ldots a_{p(n-1)}$$

și prin urmare

$$a_1 \ldots a_n = (a_1 \ldots a_{n-1})\, a_n = (a_{p(1)} \ldots a_{p(n-1)})\, a_n = a_{p(1)} \ldots a_{p(n)}.$$

II. Cazul $p(n) \neq n$. În acest caz, fie k numărul pentru care $p(k) = n$. Avem

$$(a_{p(1)} \ldots a_{p(k-1)})\,(a_{p(k)}\,(a_{p(k+1)} \ldots a_{p(n)})) =$$

$$= (a_{p(1)} \ldots a_{p(k-1)})\,((a_{p(k+1)} \ldots a_{p(n)})\, a_{p(k)}) =$$

$$= a_{q(1)} \ldots a_{q(k-1)}\, a_{q(k)} \ldots a_{q(n-1)}\, a_{q(n)},$$

unde $q(i) = p(i)$ pentru $i = 1, \ldots, k-1$, $q(k) = p(k+1), \ldots$

$$\ldots, q(n-1) = p(n),\ q(n) = p(k) = n.$$

Se vede că q este o permutare a mulțimii $1, \ldots, n$ (pentru că duce această mulțime în ea însăși, ca și p, și duce elemente distincte în elemente distincte ca și p). Dar q este o permutare care lasă pe loc indicele n, ca în primul caz; prin urmare

$$a_{p(1)} \ldots a_{j(n)} = a_{i(1)} \ldots a_{i(n)} = a_1 \ldots a_n,$$

ceea ce demonstrează teorema.

§ 4. Grupuri

4.1. **Definiție.** Se numește *grup* orice semigrup G care are proprietatea că pentru orice a și b din G fiecare dintre ecuațiile

$$ax = b, \quad ya = b \tag{4.1}$$

are o soluție și numai una.

Din condiția de unicitate a soluției fiecăreia dintre ecuațiile (4.1) rezultă că, *dacă c și d sînt elemente dintr-un grup G și dacă există un $a \in G$ astfel încît să putem scrie $ac = ad$ sau $ca = da$, atunci $c = d$.*

Se exprimă acest lucru spunînd că într-un grup orice egalitate de forma $ac = ad$ se poate simplifica. Același lucru se poate spune despre egalitățile de forma $ca = da$.

4.2. Observăm că în orice grup există un element neutru. Într-adevăr, să considerăm un grup G, adică un semigrup în care fiecare dintre ecuațiile (4.1) are soluție unică și să notăm cu e soluția ecuației

$$ax = a, \tag{4.2}$$

pentru un a dat din G.

Fie b un element oarecare din G și y soluția ecuației $ya = b$. Înmulțind la stînga cu y relația

$$ae = a,$$

deducem

$$(ya)\, e = ya, \text{ adică } be = b.$$

Reținem că elementul e, soluția ecuației (4.2), verifică egalitatea

$$be = b, \tag{4.3}$$

pentru orice b din G.

În același mod se arată că soluția e' a ecuației $xa = a$ verifică ecuația

$$c'c = c, \tag{4.4}$$

pentru orice c din G.

Aceasta arată că în G există un element neutru e (soluția ecuației (4.4) și, prin urmare, conform teoremei 2 de unicitate a elementului neutru (v. punctul 2.3), un singur element neutru).

În continuare, se poate arăta că pentru fiecare element dintr-un grup există un element a astfel încît $a'a = aa' = e$, e fiind elementul neutru din G.

Anume, a' este soluția ecuației

$$ax = e.$$

Să notăm cu a'' soluția ecuației $a'y = e$ și să înmulțim la dreapta cu a'' relația $aa' = e$; rezultă

$$(aa')\, a'' = a''.$$

Observînd că putem scrie $(aa')\, a'' = a\,(a'a'') = a$, deducem $a = a''$; prin urmare, avem

$$a'a = aa' = e.$$

Elementul a' astfel găsit se notează cu a^{-1} și se numește *inversul lui* a. Unicitatea lui a^{-1} rezultă din faptul că putem simplifica cu a (din $aa^* = e$, rezultă $aa^{-1} = aa^*$, prin urmare $a^{-1} = a^*$).

Reciproc, are loc

Teorema 4. *Orice semigrup G este grup dacă are*

1° *cel puțin un element e astfel încît*

$$ae = a,$$

pentru orice $a \in G$ și dacă

2° *pentru orice $a \in G$ există un a' astfel încît*

$$aa' = e.$$

Demonstrație. Observăm în prealabil următoarele: dacă $aa' = e$ și dacă a'' este astfel încît $a'a'' = e$, atunci $a'a = (a'a)\,(a'a'') = a'\,(aa')\,a'' = a'ea'' = (a'e)\,a'' = a'a'' = e$. De asemenea, dacă $ae = a$, atunci

$$ea = (aa')\,a = a\,(a'a) = ae = a.$$

Prin urmare, elementul e din condiția 1° din enunț este element neutru în semigrupul G, iar elementul a' din condiția 2° este inversul lui a.

Rezultă că în G există un singur element neutru și, pentru fiecare a, există un singur invers [orice alt invers a^* al lui a verifică relația $a^* = a^*(aa') = (a^*a)\,a' = a'$]; se notează acest invers cu a^{-1}.

Observăm că ecuația $ax = b$ are soluția $a^{-1}b$. Dacă x și y sînt două soluții ale acestei ecuații, deducem $ax = b = ay$ și, mai departe, înmulțind la stînga cu a^{-1}, deducem $x = y$.

De asemenea, ecuația $xa = b$ are soluția $x = ba^{-1}$ și se verifică în același mod că aceasta este unica soluție a ecuației în discuție. Rezultă că G, într-adevăr, este grup și teorema este demonstrată.

4.3. **Aplicație.** Faptul că într-un semigrup legea de compunere este asociativă face posibil calculul cu puterile unui element (cu exponenții pozitivi) într-o asemenea structură algebrică. Calculul cu puterile întregi ale unui element este posibil într-un grup.

Dacă a este un element al unui semigrup, se numește *puterea* m a lui a și se notează cu a^m produsul a m factori egali cu a. Se înțelege că m este un număr întreg mai mare sau cel puțin egal cu 1. În baza asociativității legii de compunere, din această definiție rezultă

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{4.5}$$

și

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{4.6}$$

pentru toți întregii $m \geqslant 1$ și $n \geqslant 1$.

Este destul să observăm formulele $(a_1 \ldots a_m)\,(a_{m+1} \ldots a_{m+n}) = a_1 a_2 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_{m+n}$ și pentru un produs de n paranteze egale, $(a_1 \ldots a_m) \ldots (a_1 \ldots a_m) = \underbrace{(a_1 \ldots a_m \ldots a_m)}_{mn \text{ factori}}$, în cazul $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = a$.

Să presupunem acum că elementul a face parte dintr-un grup G; prin urmare, a are un invers a^{-1}. Să notăm cu e elementul neutru din G. Dacă $a_1, \ldots, a_n$ sînt elemente din G, putem scrie

$$(a_1 \ldots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \ldots a_1^{-1}$$

pentru că $a_1 \ldots a_n . a_n^{-1} \ldots a_1^{-1} = e$; în particular,

$$(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n, \tag{4.7}$$

pentru orice $n \geqslant 1$.

Să punem, ca definiție,

$$a^{-n} = (a^{-1})^n, \tag{4.8}$$

pentru orice întreg $n \geqslant 1$. Cu alte cuvinte, pentru orice $m \leqslant -1$, definim

$$a^m = (a^{-1})^{-m} \text{ sau } a^m = (a^{-m})^{-1}, \tag{4.8'}$$

ceea ce în baza lui (4.7) este acelaşi lucru.

Pentru m negativ, relaţia de recurenţă

$$a^m = (a^{-1})^{-m} = (a^{-1})^{-m-1} \cdot a^{-1} = a^{m+1} \cdot a^{-1}, \tag{4.9}$$

care prelungeşte, la grupul exponenţilor întregi, formula de recurenţă

$$a^{n+1} = a^n \cdot a,$$

relativă la exponenţi întregi pozitivi.

Se poate arăta că puterile întregi, definite pentru exponenţi pozitivi ca produs de factori egali, iar pentru exponenţi negativi prin formula (4.8'), satisfac relaţiile (4.5) şi (4.6).

În acest scop este convenabil să examinăm, pe rînd, cazurile

1) $m > 0$, $n > 0$;
2) $m > 0$, $n < 0$;
3) $m < 0$, $n > 0$;
4) $m < 0$, $n < 0$.

Pentru relaţia (4.5), cazul 1) a fost deja considerat.

În cazul 2), putem scrie

$$a^m a^n = a^m (a^{-1})^{-n} = \overbrace{(a \ldots a)}^{m \text{ factori}} \overbrace{(a^{-1} \ldots a^{-1})}^{n \text{ factori}}.$$

Grupînd în produsul din dreapta factorii $a \cdot a^{-1}$ şi înlocuind produsul lor cu e, suprimînd acest element în produs şi repetînd operaţia de cîte ori este cazul, găsim: dacă $m > -n$, din produsul din dreapta rămîne $a^{m-(-n)} = a^{m+n}$; dacă $m < -n$, rămîne $(a^{-1})^{-n-m} = a^{m+n}$; deci, oricum, şi în cazul 2) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

În particular, rezultă $a^0 = a^m \cdot a^{-m} = e$.

Cazurile 3) şi 4) se reduc la 2) şi 1) respectiv punînd a^{-1} în locul lui a:

$$a^m \cdot a^n = (a^{-1})^{-m} \cdot (a^{-1})^{-n} \ldots$$

Pentru relaţia (4.6), cazul 1) de asemenea a fost considerat. În cazul 2):

$$(a^m)^n = ((a^m)^{-1})^{-n} = ((a^{-1})^m)^{-n} = (a^{-1})^{-mn} = ((a^{-1})^{-1})^{mn} = a^{mn}.$$

Cazul 3) se tratează la fel:

$$(a^m)^n = ((a^{-1})^{-m})^n = (a^{-1})^{-mn} = a^{-(-mn)} = a^{mn}.$$

Cazul 4) se reduce la cazul 2), de exemplu,

$$(a^m)^n = ((a^{-1})^{-m})^n = (a^{-1})^{-mn} = a^{mn}.$$

4.4. Noţiunea de grup se întregeşte cu aceea de omomorfism de grup. Se numeşte *omomorfism* al unui grup G într-un grup G' orice funcţie f definită pe G cu valori în G', care satisface condiţia

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y) \tag{4.10}$$

pentru orice x şi y din G.

Condiţia (4.10) nu spune altceva decît că funcţia f comută cu legile de compunere în G şi G' : fie că facem produsul xy (în G) şi luăm apoi imaginea sa $f(xy)$, fie că luăm mai întîi imaginile $f(x)$ şi $f(y)$ ale factorilor şi apoi calculăm produsul $f(x)f(y)$ (în G'); găsim acelaşi rezultat.

Rezultă că dacă e este elementul neutru în G, atunci

$$f(x) \cdot f(e) = f(xe) = f(x),$$

adică $f(e)$ este elementul neutru în G.

De asemenea, din relaţia

$$f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(x \cdot x^{-1}) = f(e),$$

rezultă că $f(x^{-1})$ este inversul lui $f(x)$, $(f(x))^{-1} = f(x^{-1})$.

În particular, dacă $f(x) = f(e)$, atunci şi $f(x^{-1}) = f(e)$.

Exemple. 1. Să considerăm drept grup G grupul aditiv R al numerelor reale, drept grup G' grupul multiplicativ R^* al numerelor reale nenule. Însemnînd cu a un număr real pozitiv, funcţia $f(x) = a^x$ este un omomorfism al lui R în R^* :

$$f(x + y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$$

oricare ar fi numerele reale x şi y.

2. De asemenea, m fiind un număr întreg, funcţia $g(x) = x^m$ este un omomorfism al lui R în R^* :

$$g(xy) = (xy)^m = x^m y^m = g(x)\, g(y).$$

3. La fel, funcţia $h(x) = |x|$ (modulul lui x) este un omomorfism al grupului C^* format de numerele complexe (nenule) în grupul R^* :

$$h(xy) = |xy| = |x|\,|y| = h(x)\, h(y).$$

4.5. O altă noţiune importantă în teoria grupurilor este aceea de subgrup.

Se numeşte *subgrup* al unui grup G orice parte H a lui G, care împreună cu operaţia de compunere a grupului G este ea însăşi grup.

Exemple. 1) Mulţimea numerelor întregi $2Z$ împreună cu adunarea este un subgrup al grupului aditiv Z al tuturor întregilor

ionali; la rîndul său, Z este un subgrup al grupului aditiv Q al tuturor numerelor raţionale; Q este şi el un subgrup al grupului aditiv R al numerelor reale, iar R este un subgrup al grupului aditiv C al numerelor complexe.

2) De asemenea grupul multiplicativ Q^* al numerelor raţionale nenule este un subgrup al grupului multiplicativ R^* al numerelor reale, diferite de zero; R este un subgrup al grupului multiplicativ C^* al numerelor complexe nenule.

Fie G un grup şi H o parte a lui G.

Teorema 5. *H este subgrup al lui G dacă şi numai dacă este îndeplinită condiţia: oricare ar fi elementele x şi y din H, elementele xy şi x^{-1} să aparţină şi ele lui H.*

Demonstraţia acestei afirmaţii este foarte simplă: dacă H este subgrup, el este grup cu legea de compunere a lui G; prin urmare, pentru orice $x, y \in H$ avem $xy \in H$ şi $x^{-1} \in H$.

Reciproc, dacă pentru orice $x, y \in H$ este adevărat că $xy \in H$, înseamnă că legea de compunere din G este şi lege de compunere în H. Această lege de compunere este asociativă [egalitatea $(xy)z = x(yz)$ cu elemente din H, avînd loc în G, are loc în H].

În sfîrşit, dacă pentru orice $x \in H$ inversul x^{-1} face parte tot din H, rezultă că elementul neutru e din G este cuprins în H ($e = x \cdot x^{-1}$) şi este element neutru în H (egalitatea $ex = xe = x$, cu elemente din H, are loc în G; deci şi în H). Prin urmare, H este subgrup.

Condiţia din teorema precedentă se formulează adesea sub formă mai concisă: *oricare ar fi elementele x şi y din H, elementul $x^{-1}y$ să aparţină şi el lui H.*

E clar că această condiţie este echivalentă, din punct de vedere logic, cu cea din teoremă: dacă pentru orice $x \in H$ elementul x^{-1} face parte din H şi dacă produsul a două elemente oarecare din H este cuprins în H, atunci relaţiile $x \in H$, $y \in H$ implică $x^{-1} \in H$ şi $x^{-1}y \in H$. Reciproc, dacă relaţiile $x \in H$, $y \in H$ implică $x^{-1}y \in H$, atunci elementul neutru $e = x^{-1} \cdot x$ este un element din H, inversul lui x, $x^{-1}e$, este un element al lui H şi produsul $xy = (x^{-1})^{-1}y$ este un element al lui H; echivalenţa celor două condiţii este demonstrată.

Corolar. *Dacă H şi L sînt subgrupuri ale unui grup G, atunci şi $H \cap L$ este un subgrup al lui G.*

4.6. Fie f un omomorfism al unui grup G într-un grup G'. Din însăşi definiţia noţiunii de omomorfism şi din observaţiile care urmează acestei definiţii (v. 4.4), rezultă că mulţimea tuturor ele-

mentelor de forma $f(x)$ cu x din G este un subgrup al lui G'; acest subgrup se notează cu semnul $f(G)$ sau Im f și se numește *imaginea lui G prin f*. De asemenea, imaginea oricărui subgrup al lui G prin f este un subgrup al lui G'.

Exemple. Astfel imaginea lui R prin omomorfismul $x \to a^x$ din exemplul 1 (v. 4.4) este un subgrup al lui R, subgrupul multiplicativ al numerelor reale pozitive; același lucru se poate spune și despre imaginea lui R prin omomorfismele din exemplele 2 și 3 (v. 4.4).

Dacă $f(G) = G'$, omomorfismul f poartă numele de *omomorfism pe* sau *epimorfism*.

Menținem notațiile din punctul precedent și însemnăm cu e' elementul neutru din G'.

Teorema 6. *Mulțimea N a elementelor x din G care îndeplinesc condiția $f(x) = e'$ este un subgrup al lui G.*

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $f(x) = f(y) = e'$, atunci $f(x^{-1}y) = f(x^{-1})f(y) = f(x^{-1})f(x) = (f(x))^{-1} f(x) = e'$, adică, dacă x și y sînt elemente ale lui N, atunci elementul $x^{-1}y$ aparține și el lui N.

Subgrupul N din teorema precedentă se numește *nucleul lui f* și se mai notează cu simbolul $f^{-1}(e')$ sau ker f.

Observăm că, oricare ar fi elementul x din ker f și elementul a din G, elementul $a^{-1}xa$ este de asemenea cuprins în ker f. Într-adevăr, dacă $f(x) = e'$, atunci $f(a^{-1}xa) = f(a^{-1})f(x)f(a) = f(a^{-1}) \cdot f(a) = e'$.

Un subgrup N al unui grup G, care are această proprietate (că $a^{-1}xa \in N$ pentru orice $x \in N$ și $a \in G$), se numește *subgrup normal* al lui G.

Astfel nucleul unui omomorfism este un subgrup normal.

Un omomorfism al cărui nucleu se reduce la elementul neutru se numește *monomorfism*.

Un monomorfism care este și omomorfism pe se numește *izomorfism*.

Astfel, fie S simetria față de un punct pe o dreaptă și I aplicația identică a dreptei în ea însăși. Transformările S și I, cu legea de compunere prin aplicare succesivă, formează un grup izomorf cu grupul format de mulțimea $\{+1, -1\}$ cu operația de înmulțire ca lege de compunere. Izomorfismul este dat de aplicația $f: \{S, I\} \to \{-1, +1\}$, definită pe elemente $f(S) = -1$, $f(I) = +1$.

Tablele de înmulțire în cele două grupuri sînt

	I	S
I	I	S
S	S	I

	$+1$	-1
$+1$	$+1$	-1
-1	-1	$+1$

Avem

$$f(I^2) = f(I) = +1 = (+1)(+1) = f(I) \cdot f(I),$$
$$f(I \cdot S) = f(S) = -1 = f(I) \cdot f(S),$$
$$f(S^2) = f(I) = +1 = (-1)(-1) = f(S) \cdot f(S).$$

Fie C grupul aditiv al numerelor complexe şi R grupul aditiv al numerelor reale; funcţia $f : R \to C$, definită prin formula $f(x) = x + 0 \cdot i$ este un monomorfism, căci $f(x) = 0$ implică $x = 0$. La fel funcţia $g : R \to C$ definită prin formula $g(x) = 0 + xi$ este un omomorfism de grup şi anume un monomorfism.

Funcţia $h : C \to C$ definită prin formula $h(z) = \bar{z}$ (conjugatul lui z) este un izomorfism al lui C pe el însuşi (un *automorfism*).

4.7. **Grup factor.** Se poate arăta că şi afirmaţia reciprocă este adevărată: *orice subgrup normal al lui G este nucleul unui omomorfism al grupului G.*

În acest scop se face următoarea construcţie:

Fie T un subgrup normal al lui G. Pentru fiecare element x din G să considerăm mulţimea Tx, formată din produsele de forma tx cu t din T.

Mulţimile Tx se numesc clase alăturate lui T în G.

Observăm că, deoarece T este normal, $x^{-1}tx = t'$, cu $t, t' \in T$; astfel $tx = xt'$, adică $Tx = xT$. Dacă $y \in Tx$, adică dacă $y = tx$, atunci $Ty \subset Tx$. În acest caz, putem scrie $x = t^{-1}y$; prin urmare, şi $Tx \subset Ty$, adică $Tx = Ty$. Rezultă că două clase alăturate lui T nu au elemente comune (sau coincid în întregime).

Mulţimea claselor alăturate subgrupului normal T în G se notează cu G/T.

Să considerăm funcţia h care asociază fiecărui element x din G clasa $\bar{x} = Tx$ (un element din G/T). Funcţia h este definită pe G cu valori în G/T; h se numeşte *aplicaţia naturală* a lui G în G/T. Să definim o lege de compunere în G/T punînd

$$(Tx)(Ty) = Tz \tag{4.11}$$

dacă $xy \in Tz$. Să observăm că dacă $xy \in Tz$, atunci pentru orice t_1 şi t_2 din T avem $t_1 x t_2 y = t_1(xt_2x^{-1})(xy) = t_3 xy \in Tz$ deoarece T fiind normal, $xt_2x^{-1} \in T$ şi $t_3 = t_1(xt_2x^{-1}) \in T$. Astfel clasa Tz, deşi definită cu ajutorul elementelor x, y, depinde numai de clasele Tx şi Ty; plecînd cu alte elemente t_1x şi t_2y din clasele Tx şi Ty respectiv, găsim aceeaşi clasă Tz. Relaţia (4.11) se poate scrie

$$TxTy = Txy, \tag{4.11'}$$

deoarece $xy \in Txy$.

Observăm acum că legea de compunere definită este asociativă :

$$(Tx_1Tx_2)Tx_3 = Tx_1x_2x_3 = Tx_1(Tx_2Tx_3),$$

iar clasa $T = Te$ este element neutru pentru această lege de compunere :

$$TeTx = TxTe = Tx$$

şi

$$Tx^{-1}Tx = TxTx^{-1} = Txx^{-1} = T$$

(clasele Tx şi Tx^{-1} sînt elemente inverse).

Astfel, dacă T este subgrup normal, G/T împreună cu operaţia de compunere (4.11) sau (4.11') este grup, iar aplicaţia naturală $h : G \to G/T$ este omomorfism :

$$h(xy) = Txy = TxTy = h(x)h(y).$$

Nucleul lui h este mulţimea elementelor din T, adică T însuşi, ceea ce demonstrează afirmaţia de la începutul acestui punct.

Exemple. 1. Fie $G = Z$ grupul numerelor întregi raţionale şi $T = 2Z$ subgrupul numerelor întregi raţionale pare. Subgrupul $2Z$ este normal pentru că Z e comutativ.

Orice număr întreg este par sau dă restul 1 prin împărţirea cu 2. Adică orice număr întreg este cuprins în clasa $\hat{0} = 2Z$ sau este de forma $1 + 2m$, adică este în clasa $\hat{1} = 1 + 2Z$. Astfel, grupul factor $G/T = Z/2Z$ este format, în acest caz, numai din elementele $\hat{0}$ şi $\hat{1}$. Acest grup se notează cu Z_2. Legea de compunere în el este dată de *tabla adunării*

	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{0}$

Această tablă se calculează cu ajutorul reprezentanţilor ; de exemplu $\hat{1} + \hat{1}$ este clasa lui $1 + 1 = 2$, adică $\hat{0}$.

2. Să considerăm, tot în Z subgrupul $T = 4Z$. În acest caz, clasele sînt : $\hat{0} = 4Z$, $\hat{1} = 1 + 4Z$, mulţimile întregilor care dau restul 1 prin împărţirea cu 4, $\hat{2} = 2 + 4Z$ şi $\hat{3} = 3 + 4Z$. Acest grup se notează cu Z_4 (şi în general $Z_m = Z/mZ$).

Tabla adunării în Z_4 este

	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

și se calculează la fel cu reprezentanții: $\hat{2} + \hat{2}$ este clasa lui $2 + 2$; $\hat{1} + \hat{2}$ este clasa lui $1 + 2$, aceeași cu clasa lui $5+2$, adică $\hat{3}$. Omomorfismul natural $h : Z_n \to Z_n$ dat prin formula $h(m) =$ clasa lui m, funcționează astfel: $h(4) = 0$, $h(2) = h(6) = h(-2) = \hat{2}$ $h(11) = \hat{3}$ etc.

Pentru a găsi pe $h(m)$, se calculează restul r al împărțirii lui m cu 4 și se pune $h(m) = \hat{r}$. Astfel $-6 = 4(-2) + 2$; prin urmare $h(-6) = \hat{2}$.

Teoremă *Fie f un omomorfism al unui grup G pe un grup G' și fie T nucleul lui f; să notăm cu h omomorfismul natural $G \to G/T$; în aceste condiții, există un izomorfism g al grupului G/T pe grupul G' astfel încît să putem scrie $f' = g \circ h$.*

Funcția g se definește astfel: fie Tx un element al lui G/T, adică o clasă alăturată lui T; punem $g(Tx) = f(x)$. Trebuie observat că dacă $Tx = Ty$, adică dacă $y = tx$ cu $t \in T$, atunci $f(y) = f(t)f(x) = f(x)$, deoarece $f(t) = e'$, ceea ce arată că $g(Tx)$ nu depinde de elementul x al clasei Tx, ci numai de clasa Tx.

Observăm apoi că $g(Tx \cdot Ty) = g(Txy) = f(xy) = f(x)f(y) = g(Tx)g(Ty)$; prin urmare, g este omomorfism.

Mai departe, g este omomorfism **pe**, deoarece fiecare element din G' este de forma $f(x)$, adică de forma $g(Tx)$. În sfîrșit, g este izomorfism, deoarece din relația $g(Tx) = e'$, rezultă $f(x) = e'$, adică $x \in T$; $Tx = T$; ker $g = T$ se reduce la elementul neutru.

Cum $Tx = h(x)$, avem $f(x) = g(Tx) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$ și teorema este complet demonstrată.

Această teoremă arată că orice imagine omomorfă a unui grup G este izomorfă cu un grup factor G/T, unde T este un subgrup normal al lui G.

4.8. **Exemple.** În cele ce urmează, ne propunem să considerăm unele exemple de grupuri strîns legate de matematica elementară.

4.8.1. Subgrupurile lui Z. Grupul aditiv Z al întregilor raționali este important atît prin faptul că este cel mai familiar exemplu de grup, cît și pentru că intervine în numeroase construcții din matematică. Subgrupurile lui Z sînt de asemenea importante și se pot descrie cu ușurință.

Fie G un subgrup al lui Z. Dacă un întreg m face parte din G, atunci și $-m$ este cuprins în G; prin urmare, dacă G cuprinde și alte elemente în afară de 0, el cuprinde numaidecît și numere pozitive. Fie p cel mai mic întreg pozitiv cuprins în G; orice multiplu pozitiv sau negativ al lui p este cuprins în G (ca sumă de întregi egali cu p sau cu $-p$).

Dar se poate arăta că orice întreg g din G este un multiplu al lui p. Anume, putem scrie formula împărţirii cu rest (a lui g prin p)

$$g = pc + r$$

cu $0 \leqslant r < p$.

Deoarece pc şi g sînt numere cuprinse în G, $r = g - pc$ este cuprins în G. Cum g este strict mai mic decît p şi nenegativ, rezultă numaidecît $r = 0$; prin urmare $g = pc$.

Astfel, orice subgrup al lui Z coincide cu mulţimea multiplilor unui întreg p. Pentru a pune în evidenţă întregul p, se scrie pZ în loc de G.

Faptul că orice subgrup al lui Z este de forma pZ este de mare importanţă în aritmetică.

Astfel, dacă $x_1, \ldots, x_n$ sînt numere întregi date, numerele de forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n, \tag{4.12}$$

cu $a_1, \ldots, a_n$ întregi, formează un subgrup al lui Z; prin urmare, un subgrup de forma dZ, cu d întreg pozitiv.

Întregul d are următoarele proprietăţi:

1° d divide pe fiecare dintre numerele $x_1, \ldots, x_n$, pentru că $x_i \in dZ$;

2° $d = b_1x_1 + \ldots + b_n x_n$, pentru că toate numerele subgrupului dZ sînt de forma (4.12);

3° orice divizor comun al numerelor $x_1, \ldots, x_n$ este un divizor al lui d (cum rezultă din 2°).

Recunoaştem în d cel mai mare divizor comun al numerelor $x_1, \ldots, x_n$.

La fel, se poate arăta că c.m.m.m.c. al numerelor $x_1, \ldots, x_n$ este întregul m care are proprietatea că

$$mZ = x_1Z \cap x_2Z \cap \ldots \cap x_nZ.$$

4.8.2. *Grupuri ciclice.* Fie acum f un omomorfism al grupului Z într-un alt grup X. Nucleul lui f este un subgrup al lui Z, deci de forma mZ. Rezultă că $f(Z)$ este izomorf cu Z/mZ.

Grupul Z/mZ se notează cu simbolul Z_m şi poartă numele de *subgrupul claselor de resturi modulo m*. Astfel, orice imagine omomorfă a lui Z este un grup izomorf cu Z_m cu m convenabil ales în Z.

În particular, fie a un element oarecare dintr-un grup X şi $f: Z \to X$ funcţia care face să corespundă fiecărui întreg m ele-

mentul $f(m) = a^m$. Funcţia f este un omomorfism al lui Z în X, iar $f(Z)$ este grupul puterilor lui a; acesta se numeşte *grupul ciclic* generat de a.

Rezultă că orice grup ciclic este izomorf cu Z (cînd nucleul lui f se reduce la 0) sau cu un grup Z_n. Grupurile izomorfe cu Z se zic *grupuri ciclice libere*; grupurile izomorfe cu Z_n se numesc *grupuri ciclice finite de ordinul n.*

Corolar. *Toate grupurile ciclice libere sînt izomorfe între ele* (pentru că sînt izomorfe cu Z); *toate grupurile ciclice de ordinul n sînt izomorfe între ele* (pentru că sînt izomorfe cu Z_n).

În particular subgrupurile lui Z sînt ciclice libere, în afară de subgrupul $\{0\}$.

Orice subgrup al unui grup ciclic este grup ciclic (pentru că este imaginea omomorfă a unui subgrup al lui Z; prin urmare, imaginea omomorfă a lui Z). De asemenea, orice imagine omomorfă a unui grup ciclic este un grup ciclic.

4.8.3. *Grupuri finite.* Să presupunem că G este un grup format dintr-un număr finit m de elemente; m se numeşte ordinul lui G. Fie H un subgrup al lui G. Este clar că în acest caz şi H este de ordin finit; fie n ordinul lui H.

Fiecare clasă alăturată lui H are n elemente; prin urmare, elementele lui G se împart în clase de cîte n elemente. Rezultă că n este un divizor al lui m.

În particular, orice grup de ordin prim nu are alte subgrupuri afară de cel care se reduce la elementul neutru şi de el însuşi; subgrupul ciclic format de puterile unui element oarecare dintr-un astfel de grup coincide cu grupul însuşi. Cu alte cuvinte, orice grup finit de ordin prim p este ciclic şi, prin urmare, izomorf cu Z_p. Astfel grupul multiplicativ format de $+1$ şi -1, rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 1 = 0$, este izomorf cu grupul format de simetria faţă de o dreaptă dată şi de transformarea identică a unui plan şi este izomorf cu grupul format de simetria faţă de un punct şi de transformarea identică a dreptei, planului etc.; toate aceste grupuri sînt izomorfe cu Z etc.

4.8.4. Grupurile ciclice de ordinul al patrulea sînt izomorfe cu Z_4 (de exemplu grupul multiplicativ al rădăcinilor ecuaţiei $x^4 - 1 = 0$, grupul rotaţiilor unui pătrat în el însuşi ş.a.).

Să notăm cu a, b simetriile faţă de două drepte perpendiculare într-un plan; cu c simetria faţă de punctul lor de intersecţie şi e transformarea identică a planului în el însuşi. Transformările

a,b,c,e formează un grup K de ordinul al patrulea cu următoarea tablă de înmulţire:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Toate elementele grupului K sînt de ordinul al doilea (adică $x^2 = e$), astfel încît K nu este ciclic.

Se poate arăta că orice grup de ordinul al patrulea este izomorf cu Z_4 sau cu grupul K.

Într-adevăr, fie X un grup de ordinul al patrulea care nu este ciclic. Să notăm cu x, y, z elementele lui X diferite de elementul neutru şi cu e elementul neutru din X. Elementele x, y, z sînt de ordinul al doilea, singurul divizor al lui 4 (diferit de 1 şi de 4).

Astfel $x^2 = y^2 = z^2 = e$; prin urmare

$$x^{-1} = x,\ y^{-1} = y,\ z^{-1} = z. \tag{4.13}$$

Observăm că $xy \neq e$ (altfel ar fi $y = x^{-1} = c$, ceea ce nu se poate), $xy \neq x$ (altfel ar fi $y = e$, ceea ce este absurd) şi de asemenea $xy \neq y$.

La fel $yx \neq e$, $yx \neq x$, $yx \neq y$. Prin urmare,

$$xy = z = yx. \tag{4.14}$$

Din (4.13) şi din (4.14) rezultă $xz = zx = y$, $zy = yz = x$.

Se recunoaşte că tabla de înmulţire a grupului X se deduce din tabla de înmulţire a grupului K înlocuind pe e, a, b, c respectiv cu e, x, y, z; prin urmare, X este izomorf cu grupul K.

Acest grup poartă numele de *grupul lui Klein*. Îl întîlnim în geometrie sub diferite forme: grupul format de simetriile faţă de trei drepte concurente ortogonale în spaţiu şi de transformarea identică ş.a.

În acelaşi mod se poate demonstra că orice grup de ordinul al şaselea este ciclic sau este izomorf cu grupul permutărilor unei mulţimi de trei obiecte.

4.8.5. Observăm că legătura dintre noţiunea de grup şi aceea de semigrup constă nu numai în faptul că grupurile sînt semigrupuri

speciale, ci mai ales în faptul că orice semigrup S, în care putem simplifica (şi la dreapta şi la stînga), se poate scufunda într-un grup. Adică există un grup G şi un monomorfism $i: S \to G$, astfel încît orice element al lui G să se poată scrie ca produs de elementele din $i(S)$ şi de inversele elementelor din $i(S)$.

Să demonstrăm acest fapt pentru semigrupul aditiv al numerelor naturale. În mulţimea $N \times N$ să considerăm următoarea relaţie R: (a, b) este în relaţia R cu (a', b') dacă şi numai dacă

$$a + b' = a' + b.$$

Se recunoaşte uşor că R este o relaţie de echivalenţă: este reflexivă $(a + b = a + b)$, simetrică ($a + b' = a' + b$ implică $a' + b = a + b'$) şi tranzitivă (din $a + b' = a' + b$, $a' + b'' = a'' + b'$ rezultă $a + b'' = a'' + b$).

Să considerăm mulţimea cît $\frac{N \times N}{R}$. Elementele acestei mulţimi sînt clasele de echivalenţă modulo R. Vom însemna cu $C_{(a,b)}$ clasa care cuprinde perechea (a, b). Astfel $C_{(3,2)}$ este mulţimea tuturor perechilor (a, b) pentru care $a - b = 3 - 2 = 1$, adică $a + 2 = b + 3$;

$C_{(3,2)} = \{(3,2), (2,1), (4,3), \ldots, (7,6), \ldots\}$;

$C_{(2,3)}$ este mulţimea tuturor perechilor (x, y) pentru care $y - x = 1$ adică $x + 3 = y + 2$;

$C_{(2,3)} = \{(1,2), (2,3), (3,4), \ldots, (6,7), \ldots\}$.

În mulţimea $Z = \frac{N \times N}{R}$ să definim operaţia de adunare prin formula

$$C_{(a,b)} + C_{(x,y)} = C_{(a+x,\, b+y)}. \tag{4.15}$$

Încă nu putem spune că prin această formulă este definită o lege de compunere în Z, deoarece clasa $C_{(a+x,\, b+y)}$ este definită cu ajutorul perechilor (a, b), (x, y) [şi nu direct cu clasele $C_{(a,b)}$, $C_{(x,y)}$]. Dar se poate verifica uşor că $C_{(a+x,\, b+y)}$ nu se schimbă dacă în locul perechii (a, b) punem altă pereche $(a', b') \in C_{(a,b)}$. Într-adevăr, din

$$a + b' = a' + b$$

rezultă

$$(a' + x) + (b + y) = (a + x) + (b' + y),$$

adică

$$C_{(a'+x,\, b'+y)} = C_{(a+x,\, b+y)}.$$

Tot astfel se vede că $C_{(a+x,\ b+y)}$ nu se schimbă dacă înlocuim perechea (x, y) cu una echivalentă; aceasta înseamnă că $C_{(a+x,\ b+y)}$ depinde, de fapt, numai de clasele $C_{(a,\ b)}$, $C_{(x,\ y)}$.

Formula (4.15) defineşte, prin urmare, o aplicaţie a mulţimii $Z \times Z$ în Z, adică o lege de compunere în Z.

Să verificăm acum că această lege de compunere este *asociativă*. Într-adevăr

$$(C_{(a,\ b)} + C_{(x,\ y)}) + C_{(u,\ v)} = C_{(a+x,\ b+y)} + C_{(u,\ v)} =$$
$$= C_{((a+x)+v),\ (b+y)+v)} = C_{(a+(x+u)),\ (b+(y+v))} =$$
$$= C_{(a,\ b)} + C_{(x+u,\ y+v)} = C_{(a,\ b)} + (C_{(x,\ y)} + C_{(u,\ v)}).$$

Astfel Z este un semigrup şi anume un semigrup *comutativ*:

$$C_{(a,\ b)} + C_{(x,\ y)} = C_{(a+x,\ b+y)} = C_{(x+a,\ y+b)} = C_{(x,\ y)} + C_{(a,\ b)}.$$

În Z există *element neutru*, anume clasa $C_{(1,1)}$. Într-adevăr,

$$C_{(a,\ b)} + C_{(1,\ 1)} = C_{(a+1,\ b+1)} = C_{(a,\ b)}.$$

Observăm că

$$C_{(1,\ 1)} = C_{(2,\ 2)} = \ldots = C_{(n,\ n)} = \ldots$$

De asemenea, în Z, *fiecare element are un invers*:

$$C_{(a,\ b)} + C_{(b,\ a)} = C_{(a+b,\ b+a)} = C_{(1,\ 1)}.$$

Prin urmare, Z este un grup care se numeşte *grupul numerelor întregi* sau întregi raţionali (spre deosebire de întregii lui Gauss).

În conformitate cu scrierea aditivă, pe care o folosim, elementul neutru se numeşte *zero* şi-l vom nota cu 0, iar inversul unui element se numeşte *opusul* aceluia şi putem scrie $C_{(b,\ a)} = -C_{(a,\ b)}$.

Să considerăm aplicaţia $i : N \to Z$, definită prin formula

$$i(m) = C_{(m+1,\ 1)}.$$

Avem

$$i(m + n) = C_{(m+n+1,\ 1)} = C_{(m+n+2,\ 2)} = C_{(m+1,\ 1)} + C_{(n+1,\ 1)} = i(m) + i(n).$$

Aplicaţia i este deci un omomorfism de semigrup şi anume este un omomorfism injectiv, pentru că din $i(m) = i(m')$ rezultă $C_{(m+1,\ 1)} = C_{(m'+1,\ 1)}$, adică $m + 2 = m' + 2$; prin urmare $m = m'$.

Pentru simplificare, se scrie $i(m) = +m$ sau m şi se identifică imaginea lui m prin monomorfismul i cu m însăşi, iar $i(N)$ se identifică cu N şi se numeşte *semigrupul întregilor pozitivi* sau semigrupul întregilor naturali (al numerelor întregi naturale). Elementele acestui semigrup $+1$, $+2$, $+3$,... se numesc întregi naturali sau *întregi pozitivi*. De asemenea, se scrie $-i(n) = -n$, pentru orice număr

natural n; $-n$ este opusul lui $+n$; -1, -2, -3,... sînt numerele întregi negative sau *întregi negativi*.

4.9. **Exerciţii**

1. Se consideră următoarele mulţimi, fiecare împreună cu operaţia indicată alături:

1) Mulţimea $2Z$ a întregilor raţionali divizibili cu 2: 0, ± 2, ± 4,..., cu adunarea.

2) Mulţimea $0, +1, +2,...$ formată de întregii nenegativi, cu adunarea.

3) Mulţimea tuturor întregilor divizibili cu 9, cu adunarea.

4) Mulţimea tuturor numerelor raţionale de forma 2^n cu n întreg (pozitiv, negativ sau nul), cu înmulţirea.

5) Mulţimea tuturor numerelor raţionale, cu scăderea.

6) Mulţimea tuturor numerelor raţionale, cu înmulţirea.

7) Muţimea tuturor rădăcinilor ecuaţiei $x^n - 1 = 0$, cu înmulţirea.

8) Mulţimea matricelor pătrate de ordinul al treilea cu elemente reale, cu înmulţirea.

9) Mulţimea matricelor pătrate de ordinul al treilea cu elemente raţionale, de determinant diferit de zero, cu adunarea.

10) Mulţimea matricelor pătrate de ordinul al doilea cu elemente întregi, cu înmulţirea.

11) Mulţimea matricelor pătrate de ordinul al doilea cu elemente întregi şi cu determinantul egal cu ± 1, cu înmulţirea.

12) Mulţimea matricelor pătrate de ordinul al doilea cu elemente întregi, cu adunarea.

13) Mulţimea tuturor permutărilor pare ale mulţimii $\{1, 2,..., n\}$ cu legea de compunere obişnuită pentru permutări.

Care dintre aceste mulţimi este grup, care este semigrup, care nu este nici semigrup?

2. Se consideră mulţimea numerelor reale pozitive cu operaţia de compunere $(a, b) \to a^2 b^2$. Este aceasta un grup?

R. Nu, căci operaţia nu este asociativă.

3. Se consideră mulţimea tuturor numerelor reale, cu operaţia

$$(x, y) \to \sqrt[3]{x^3 + y^3};$$

să se demonstreze că este un grup G.

4. Însemnînd cu R grupul aditiv al numerelor reale şi cu G grupul din exerciţiul precedent, să se arate că aplicaţia $f: R \to G$, definită prin formula $f(a) = \sqrt[3]{a}$ este un izomorfism.

R. Să punem $\sqrt[3]{x^3 + y^3} = x \circ y$; dacă a şi b sînt numere reale şi $x = f(a) = \sqrt[3]{a}$, $y = f(b) = \sqrt[3]{b}$, avem $f(a + b) = \sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = x \circ y = f(a) \circ f(b)$; prin urmare, f este omomorfism. Este epimorfism, deoarece $x = \sqrt[3]{x^3}$.

Dacă $f(a) = 0$, $\sqrt[3]{a} = 0$; $a = 0$; prin urmare, f este monomorfism.

5. Să se arate că mulţimile 1), 3), 4) din exerciţiul 1 sînt grupuri izomorfe cu grupul întregilor raţionali (cu adunarea ca lege de compunere).

6. Orice subgrup al grupului σ_n de permutări a n obiecte se numeşte *grup de permutări*. Să se arate că aplicaţia $p \to \varepsilon(p)$ este un omomorfism al lui σ_n (şi al oricărui grup de permutări) pe grupul multiplicativ $\{+1, -1\}$ [$\varepsilon(p)$ este $+1$ dacă p este o permutare pară şi -1 dacă p este impară; afirmaţia rezultă din relaţia $\varepsilon(q \circ p) = \varepsilon(q) \cdot \varepsilon(p)$, v. I, 8.5].

7. Să se arate că orice grup G care are toate elementele de ordinul al doilea este comutativ (exemplu: grupul lui Klein).

R. Fie a şi b două elemente din G. Facă $(ab)^2 = e$ (elementul neutru), atunci avem $abab = e$. Înmulţind la dreapta cu b, avem $aba = b$, deoarece $b^2 = e$. Înmulţind apoi cu a la dreapta şi ţinînd seamă că $a^2 = e$, avem $ab = ba$, c.c.t.d.

8. Să se arate că semigrupul multiplicativ N al numerelor naturale se poate scufunda într-un grup (grupul multiplicativ al numerelor raţionale pozitive). Se consideră în N relaţia de echivalenţă S definită astfel: perechile (a, b), (a', b') sînt în relaţia S dacă şi numai dacă $ab' = a'b$. Se va arăta că S este o relaţie de echivalenţă.

Se consideră mulţimea cît $\frac{N \times N}{S} = Q^+$. Se vor nota elementele sale cu $\frac{a}{b}$. Se consideră în Q^+ legea de compunere $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \to \frac{ac}{bd}$ (înmulţirea fracţiilor). Se va arăta că aceasta este independentă de reprezentanţi, că este asociativă, are element neutru şi că pentru orice element $\frac{a}{b} \in S$, există inversul $\frac{b}{a}$.

Astfel Q^+ rezultă grup (comutativ). Se consideră aplicaţia $j : N \to Q^+$ definită prin $j(m) = \frac{m}{1}$. Se va arăta că j este un monomorfism şi că $j(S)$ generează grupul Q^+, în sensul că orice element din Q^+ este de forma $p \cdot q^{-1}$ cu $p \in S$ şi $q \in S$.

§ 5. Inele. Corpuri

5.1. **Definiție.** O mulțime A, în care sînt definite două legi de compunere, pe care le vom numi *adunarea* $(a, b) \to a + b$ și *înmulțirea* $(a, b) \to ab$, se numește *inel*, dacă satisface următoarele condiții:

I. A, împreună cu adunarea, este grup comutativ.

II. Înmulțirea în A este:

a) asociativă: $a(bc) = (ab)c$, oricare ar fi a,b,c în A și

b) distributivă față de adunare:

$$(a + b)c = ac + bc,\ c(a + b) = ca + cb.$$

Dacă $-y$ este opusul lui y, suma $x + (-y)$ se scrie $x - y$ și se numește *diferența* dintre x și y. Din definiția lui $-y$, $y + (-y) = 0$, rezultă că $-(-y) = y$. Prin urmare, putem scrie

$$xz = ((x - y) + y)\, z = (x - y)\, z + yz,$$

de unde rezultă $xz - yz = (x - y)z$, adică $(x - y)z = xz - yz$ și la fel

$$z(x - y) = zx - zy:$$

înmulțirea este distributivă și față de diferență.

Din aceste relații, punînd $y = x$, deducem

$$0z = xz - xz = 0,\ z0 = zx - zx = 0,$$

pentru orice $z \in A$.

În orice inel, 0 *este element singular pentru înmulțire* (este o consecință a distributivității înmulțirii față de adunare).

În continuare, deducem

$$x(-y) = x(0 - y) = x0 - xy = -xy \text{ și la fel } (-x)y = -xy,$$

de unde și

$$(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy) = xy$$

(regula semnelor pentru înmulțire).

Inelul A se numește *comutativ*, dacă înmulțirea satisface și condiția

$$ab = ba,$$

pentru orice a și b din A.

Exemple. 1. Mulțimea numerelor întregi Z (p. 146) împreună cu adunarea și înmulțirea, este un inel comutativ.

2. Să considerăm numerele complexe de forma $a + bi$, cu a, b întregi raționali. Împreună cu adunarea și înmulțirea numerelor complexe, acestea formează un inel (inelul întregilor lui Gauss).

3. La fel numerele de forma $a + b\sqrt{2}$ cu a și b întregi, cu adunarea și înmulțirea date de formulele

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2},$$
$$(a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2}) = ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2},$$

formează un inel.

4. Matricele pătrate de ordinul n (de exemplu $n = 2$) cu elemente întregi raționale în care se iau drept legi de compunere adunarea și înmulțirea matricelor, formează un inel necomutativ.

Să considerăm o mulțime M (de exemplu un interval din mulțimea numerelor reale). Mulțimea F a tuturor funcțiilor definite pe M cu valori în inelul Z al întregilor poate fi înzestrată cu o structură de inel în modul următor: dacă f și g sînt elemente ale lui F, să notăm cu $f + g$ funcția care în orice $x \in M$ are valoarea

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

La fel, vom însemna cu fg funcția care satisface ecuația

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Se verifică ușor că F cu operația de adunare este grup comutativ. Să verificăm că adunarea este asociativă:

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) =$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x),$$

pentru orice $x \in M$. Deci

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

La fel, $-f$ este funcția definită prin formula

$$(-f)(x) = -f(x).$$

Funcția nulă este definită prin formula $f(x) = 0$, pentru orice $x \in M$.

La fel se verifică proprietățile înmulțirii. Să verificăm, spre exemplu că înmulțirea este distributivă față de adunare:

$$f(g + h)(x) = f(x)(g + h)(x) = f(x)(g(x) + h(x)) =$$
$$= f(x)g(x) + f(x)h(x) = (fg)(x) + (fh)(x) = (fg + fh)(x),$$

pentru orice $x \in M$; deci

$$f(g + h) = fg + fh.$$

5.2. Două inele A și X se zic izomorfe, dacă există o aplicație bijectivă

$$f : A \to X$$

care verifică condițiile

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \tag{5.1}$$

$$f(ab) = f(a)\,f(b). \tag{5.2}$$

Exemplu. Inelul Z al întregilor și inelul X al matricelor pătrate de forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cu a întreg sînt izomorfe. În acest caz, aplicația $f: Z \to X$ este definită prin formula

$$f(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

Noțiunile de omomorfism, de inel, de monomorfism se definesc la fel ca noțiunile omonime din cazul grupurilor (v. 4.4), înlocuind condiția (4.10) cu condițiile (5.1) și (5.2).

5.3. **Inelul întregilor raționali.** Am văzut că mulțimea Z a întregilor raționali se definește ca mulțime cît a produsului $N \times N$ printr-o relație de echivalență R, $Z = \frac{N \times N}{R}$. Apoi a fost definită o structură de grup pe mulțimea Z, punînd

$$C_{(a\,b)} + C_{(x,y)} = C_{(a+x,\ b+y)}.$$

Pe această mulțime se poate defini și o structură de inel, introducînd operația de înmulțire prin formula

$$C_{(a,b)} \cdot C_{(x,y)} = C_{(ax+by,\ ay+bx)}.$$

Întîi trebuie să arătăm că dacă (a', b') este o altă pereche din clasa $C_{(a,b)}$, atunci $C_{(a'x+b'y,\ a'y+b'x)} = C_{(ax+by,\ ay+bx)}$. Într-adevăr, dacă $(a', b') \in C_{(a,b)}$, atunci

$$a + b' = a' + b.$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned}(a'x + b'y + ay + bx) - (a'y + b'x + ax + by) = \\ = (a' + b - b' - a)x + (a + b' - a' - b)y = 0.\end{aligned}$$

Prin urmare, $C_{(ax+by,\ ay+bx)}$ nu se schimbă dacă înlocuim perechea (a, b) cu alta (a', b') din clasa $C_{(a,b)}$. Același lucru se poate spune pentru perechea (x, y). Astfel este definită înmulțirea în Z care este evident comutativă. Se poate arăta că această înmulțire este asociativă:

$$(C_{(a,b)} \cdot C_{(x,y)}) \cdot C_{(u,v)} = C_{(ax+by,\,ay+bx)} \cdot C_{(u,v)} = C_{(r,s)}$$

cu

$$r = (ax + by)u + (ay + bx)v, \quad s = (ax + by)v + (ay + bx)u.$$

La fel

$$C_{(a,b)} \cdot (C_{(x,y)} C_{(u,v)}) = C_{(a,b)} \cdot C_{(xy+yv,xv+yv)} = C_{(m,n)}$$

cu

$$m = a(xu + yv) + b(xv + yu),\ n = a(xv + yu) + b(xu + yv).$$

Este suficient să verificăm că $m = r$, $n = s$, ceea ce se face fără greutate.

În acelaşi mod se poate arăta că înmulţirea este distributivă faţă de adunare:

$$C_{(a,b)} \cdot (C_{(x,y)} + C_{(u,v)}) = C_{(a,b)} \cdot C_{(x,y)} + C_{(a,b)} \cdot C_{(u,v)}.$$

Identităţile

$$a(x + u) + b(y + v) = ax + by + au + bv,$$

$$a(y + v) + b(x + u) = ay + bx + av + bu$$

sînt evidente.

Astfel este demonstrat că Z este un inel.

Se poate verifica uşor că scufundarea i a mulţimii N în Z comută şi cu înmulţirea din N şi Z. Astfel

$$i(mn) = C_{(mn+a,a)} = C_{(m+1,1)} \cdot C_{(n+1,1)} = i(m)i(n).$$

Este suficient să punem $a = m + n + 2$. Putem spune că *i este o scufundare a lui N în inelul Z al întregilor raţionali.*

Structura aceasta de inel al lui Z este identică cu cea obişnuită, pentru că ele coincid pe mulţimea întregilor pozitivi şi în amîndouă este valabilă regula semnelor.

5.4. **Inele de integritate şi corpuri.** Să presupunem că este dat un inel A şi două elemente a, b din A; să considerăm ecuaţia liniară

$$ax = b. \tag{5.3}$$

Dacă această ecuaţie are o soluţie în A, se spune că a este un divizor (la stînga) pentru b, iar b este un multiplu (la dreapta) pentru a.

Să presupunem că $b = 0$; în acest caz, ecuaţia (5.3) admite soluţia 0; dar se poate să aibă şi alte soluţii. Bunăoară în inelul matricelor pătrate de ordinul al doilea, dacă $a = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, matricea $x = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ este o soluţie a ecuaţiei $ax = 0$. În acest caz a şi soluţiile nenule ale acestei ecuaţii se numesc *divizori ai lui zero*. Dacă ecuaţia $ax = 0$ şi ecuaţia $ya = 0$ au numai soluţia $x = 0$

și $y = 0$, oricare ar fi $a \neq 0$ din A, inelul A se numește *domeniu de integritate*, sau *inel de integritate*, sau *inel integru*.

Dacă A este inel de integritate, atunci, oricare ar fi $a \neq 0$ în A, ecuația (5.3) are *cel mult* o soluție, căci din $ax = b$, $ax' = b$ rezultă $a(x - x') = 0$, adică $x = x'$.

Astfel, dacă A este inelul Z al întregilor, ecuația $2x = 3$ nu are soluție în Z; ecuația $-2x = 6$ are o singură soluție. Să presupunem acum că inelul A are un element neutru 1 pentru înmulțire, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ pentru orice $a \in A$; eventual poate să aibă divizori ai lui zero (să nu fie inel de integritate).

Să considerăm ecuația

$$ax = 1.$$

Dacă această ecuație are soluție, a se numește *inversabil* la dreapta; se mai spune că a are un invers la dreapta în A. Dacă și ecuația $ya = 1$ are soluție, atunci soluțiile celor două ecuații coincid, deoarece avem, înmulțind în prima la stînga cu y și în a doua la dreapta cu x:

$$x = (ya)x = y(ax) = y.$$

În acest caz, a se zice inversabil și soluția comună a ecuațiilor precedente se notează cu a^{-1}; $x = y = a^{-1}$.

Dacă a este inversabil, ecuația $ax = b$ are o *singură* soluție, oricare ar fi b din A, soluția se obține înmulțind la stînga cu a^{-1}:

$$x = a^{-1}b;$$

ea este unică, pentru că din $ax = b = ay$ deducem $a(x - y) = 0$ și, înmulțind la stînga cu a^{-1}, $x - y = 0$.

Elementele inversabile dintr-un inel A, cu înmulțirea ca operație de compunere, formează grup (după cum rezultă din definiție, ecuațiile $ax = 1$ și $xa = 1$ avînd soluție unică). Grupul elementelor inversabile din A se notează cu A^*.

Astfel, grupul Z^* este format din 1 și -1; dacă A este inelul matricelor pătrate de ordinul al doilea cu elemente reale, A^* este format din matricele cu determinantul diferit de zero.

Dacă toate elementele nenule din A sînt inversabile, A se numește *corp*. Așadar, avem următoarea

Definiție. Un inel în care orice element nenul are un invers se numește *corp*. Exemple de corpuri sînt: corpul numerelor complexe, corpul numerelor reale, corpul numerelor raționale.

Dacă A este corp, ecuația $ax + b = 0$ cu $a \neq 0$ are întotdeauna o soluție și numai una singură.

5.5. **Corpul fracţiilor unui domeniu de integritate.** Fie A un domeniu de integritate comutativ, adică un inel comutativ fără divizori ai lui zero (aşa este inelul Z şi orice inel de polinoame cu coeficienţi într-un corp).

Să notăm cu A' mulţimea elementelor diferite de zero din A. A' se mai numeşte şi *complementara* lui 0 în A. Să considerăm produsul $A \times A'$ şi în acest produs să considerăm următoarea relaţie: perechile (a, b), (c, d) sînt în relaţia R dacă şi numai dacă $ad = bc$. E clar că R este reflexivă, simetrică şi tranzitivă, prin urmare, o relaţie de echivalenţă.

Să arătăm, spre exemplu, că R este tranzitivă. Aşadar, să presupunem că (a, b) şi (x, y) sînt în relaţia R şi tot în relaţia R se găsesc (x, y) şi (u, v). Avem $ay = bx$, $xv = uy$.

Înmulţind prima ecuaţie cu v, iar a doua cu b, obţinem $ayv = bxv$, $bxv = buy$; prin urmare $(av - bu)\, y = 0$. Deoarece $y \neq 0$ şi A este inel întreg, deducem $av = bu$, adică (a, b) se găseşte în relaţia R cu (u, v) şi tranzitivitatea este demonstrată.

Vom nota cu C factorizarea lui $A \times A'$ prin relaţia de echivalenţă R, $C = \frac{A \times A'}{R}$; de asemenea vom nota cu $\frac{a}{b}$ clasa perechii (a, b); clasa $\frac{a}{b}$ mai poartă şi numele de *fracţie*; a se numeşte numărătorul, iar b numitorul acestei fracţii. Două fracţii sînt egale, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, dacă şi numai dacă (a, b) şi (a', b') fac parte din aceeaşi clasă, adică dacă şi numai dacă $ab' = a'b$.

Să considerăm următoarele legi de compunere în C:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

E clar că numitorul bd este un element din A'; prin urmare, $\frac{ac}{bd}$ şi $\frac{ad + bc}{bd}$ sînt elemente din C. Apoi, se poate arăta că $\frac{ad + bc}{bd}$ şi $\frac{ac}{bd}$ nu depind de reprezentanţii (a, b) şi (c, d). Fie (a', b') o altă pereche din clasa $\frac{a}{b}$. Aceasta înseamnă că $a'b = b'a$. De aici

deducem că $(a'c, b'd)$ este în relația R cu (ac, bd). Într-adevăr, $a'cbd - acb'd = (a'b - ab')cd = 0$. Prin urmare

$$\frac{a'c}{b'd} = \frac{ac}{bd}.$$

La fel se arată că $\frac{ac}{bd}$ nu se schimbă dacă înlocuim perechea (c, d) cu una echivalentă (mod R). La fel se raționează și pentru clasa $\frac{ad + bc}{bd}$.

Astfel sînt definite în C operațiile de adunare și înmulțire (și sînt comutative). Se poate arăta că C împreună cu aceste operații este un inel. De exemplu, să demonstrăm asociativitatea adunării:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf},$$

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}.$$

La fel se demonstrează asociativitatea înmulțirii și distributivitatea înmulțirii față de adunare.

Elementul nul din C este $\frac{0}{a}$, 0 fiind elementul nul din A, iar $a \in A'$.

Clasele $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{b}$ rezultă opuse.

Elementul $\frac{a}{a}$ (cu $a \in A'$) este neutru pentru înmulțire.

Observăm că $(0, a)$ este în relația R cu (x, y) dacă și numai dacă $x = 0$. Aceasta rezultă din relația $xa = y \cdot 0 = 0$ și din condiția $a \in A'$, adică $a \neq 0$.

De aici deducem că fiecare element nenul din C are un invers dacă $\frac{a}{b}$ este diferit de zero, $a \neq 0$, conform observației precedente; prin urmare, $\frac{b}{a}$ este un element din C. E clar că $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ este elementul neutru pentru înmulțire în C.

Astfel C este un corp și se numește *corpul fracțiilor* inelului de integritate A; elementele lui C se numesc fracții.

Să considerăm acum aplicaţia

$$j : A \to C$$

definită prin formula $j(a) = \frac{ab}{b}$, cu $b \in A'$, $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$ cu $c \in A'$, deoarece $abc = abc$).

Să presupunem că $j(a) = j(a')$; rezultă $\frac{ab}{b} = \frac{a'c}{c}$, adică $abc = a'bc$, cu $bc \in A'$. Aceasta cere $(a - a')bc = 0$; prin urmare $a = a'$.

Mai observăm

$$j(a + a') = \frac{(a + a')b}{b} = \frac{ab}{b} + \frac{a'b}{b} = j(a) + j(a'),$$

$$j(aa') = \frac{aa'bc}{bc} = \frac{ab}{b} \cdot \frac{a'c}{c} = j(a)\, j(a'), \quad (b, c \in A').$$

Aceasta ne arată că imaginea lui A prin j este un inel izomorf cu A; $j(A)$ se identifică cu A, din această cauză şi spunem că am scufundat inelul A în corpul C al fracţiilor sale.

Exemplu. Dacă A este inelul Z al întregilor raţionali, corpul fracţiilor sale este corpul Q al numerelor raţionale.

Aplicaţia j în acest caz este definită astfel: $j(m) = \frac{m}{1}$, pentru orice întreg m. Numărul raţional $m/1$ se identifică cu m şi se numeşte *întreg raţional.*

5.6. Corpul numerelor reale.

5.6.1. Fie N o submulţime a unei mulţimi ordonate N; dacă există $y \in N$ astfel încît să putem scrie $x \leqslant y$ pentru orice x din M, se spune că M este majorată de y, iar y se numeşte *element majorant* pentru submulţimea M, [21].

Dacă, în plus, y are proprietatea că pentru N nu există în M un majorant $z < y$, diferit de y, se spune că y este cel mai mic majorant, sau margine superioară, sau majorant minimal al mulţimii M şi se scrie $y = \sup M$.

Astfel mulţimea M formată din numerele raţionale de forma $\frac{n-1}{n}$ cu n întreg natural are pe 1 ca majorant minimal: $\frac{n-1}{n} \leqslant 1$ şi pentru orice $r < 1$ avem $r < \frac{n-1}{n}$, dacă $n > \frac{1}{1-r}$.

În mod analog se definesc noțiunile de mulțime minorată și de margine inferioară.

5.6.2. În corpul Q al numerelor raționale există mulțimi majorate care nu au o margine superioară. Astfel este mulțimea M a numerelor raționale cu pătratul mai mic decît 2.

Orice număr rațional r care verifică relația $r^2 > 2$ este un majorant pentru această mulțime. Dar observăm că, dacă $r^2 > 2$, și numărul $r' = \frac{r + 2r^{-1}}{2}$ verifică relația $r'^2 > 2$. Într-adevăr,

$$r'^2 = \frac{r^2 + 4 + 4r^{-2}}{4} > \frac{4 + 4}{4} = 2.$$

Însă

$$r' < \frac{r + r^2 \cdot r^{-1}}{2} = r.$$

Astfel orice majorant r am considera în Q pentru mulțimea M, se poate deduce unul r' mai mic decît r. Aceasta arată că mulțimea M nu are în Q o margine superioară.

Se poate construi un corp R care să cuprindă pe Q și care să aibă proprietatea că orice mulțime $M \subset R$ (în particular orice submulțime a lui Q) majorată să aibă o margine superioară aparținînd lui R. Dintre diferitele construcții cunoscute, vom descrie aici pe aceea a lui Cantor cu șiruri fundamentale, după [30]. Un șir infinit de numere raționale $a_1, a_2, \ldots$ se numește șir fundamental sau șir Cauchy, dacă pentru orice număr rațional pozitiv ε există un număr natural $n = n(\varepsilon)$ astfel încît pentru $p > n$, $q > n$ să putem scrie

$$|a_p - a_q| < \varepsilon. \tag{5.4}$$

Exemple. 1) Șirul $\{a_n\}$, în care $a_n = \frac{1}{n}$, este un șir fundamental, pentru că

$$\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \frac{|q - p|}{pq} < \frac{1}{p} < \varepsilon,$$

dacă $p > n$, $q > n$, $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ (cel mai mare întreg cuprins în $\frac{1}{\varepsilon}$, $n < \frac{1}{\varepsilon} < n + 1$), q fiind mai mare decît p.

2) Șirul $\{a_n\}$ în care $a_n = 1 + (-1)^n$ nu este șir fundamental, deoarece

$$|a_p - a_q| = (-1)^p - (-1)^q = \begin{cases} 0 \text{ dacă } p - q \in 2Z, \\ 2 \text{ dacă } p - q - 1 \in 2Z; \end{cases}$$

deci nu îndeplinește condiția din definiție.

3) Şirul care se obţine prin operaţia de extragere a rădăcinii pătrate din 2 : $a_1 = 1$; $a_2 = 1{,}4$; $a_3 = 1{,}41$ etc. este un şir fundamental pentru n, astfel încît avem $\frac{1}{10_n} < \varepsilon$ şi $p > n$, $q > n$,

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{10^n} < \varepsilon.$$

4) Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este un şir fundamental, după cum se ştie din analiză.

Punînd în (5.4) $q = n + 1$, deducem inegalitatea

$$|a_p| = |a_p + (a_p - a_q)| \leqslant |a_q| + |a_p - a_q| < |a_{n+1}| + \varepsilon,$$

care arată că *orice şir fundamental este mărginit* (atît superior, cît şi inferior).

Şirurile fundamentale au următoarele proprietăţi:

I. *Suma a două şiruri fundamentale* $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ (adică şirul $\{c_n\}$ cu $c_n = a_n + b_n$) *este un şir fundamental.* Într-adevăr, fie ε un număr raţional pozitiv, arbitrar. Prin ipoteză, există un n' întreg, astfel încît pentru orice $p > n'$ şi $q > n'$ să avem

$$|a_p - a_q| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

De asemenea există un întreg natural n'' astfel încît dacă $p > n''$ şi $q > n''$, atunci,

$$|b_p - b_q| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Să notăm cu n cel mai mare dintre întregii n', n''. Dacă $p > n$ şi $q > n$, avem

$$|c_p - c_q| = |a_p + b_p - a_q - b_q| =$$

$$= |(a_p - a_q) + (b_p - b_q)| \leqslant |a_p - a_q| + |b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De asemenea, se poate arăta că

II. *Produsul* $\{a_n b_n\}$ *a două şiruri fundamentale este un şir fundamental.*

Pentru a demonstra această afirmaţie, ţinem seama că fiecare dintre factorii produsului este un şir mărginit. Adică există două numere raţionale pozitive M' şi M'', astfel încît

$$|a_p| < M' \text{ pentru } p > n' \text{ şi } |b_p| < M'' \text{ pentru } p > n''.$$

De asemenea şirurile fiind fundamentale, pentru orice număr raţional pozitiv ε, există un număr natural $\overline{n}'$, astfel încît pentru $p > \overline{n}'$ şi $q > \overline{n}'$

$$|a_p - a_q| < \frac{\varepsilon}{2M''} \tag{5.5}$$

şi un număr natural $\overline{n}''$, astfel încît pentru $p > \overline{n}''$ şi $q > \overline{n}''$,

$$|b_p - b_q| < \frac{\varepsilon}{2M'}. \tag{5.6}$$

Considerînd pe $\overline{n}'$ şi $\overline{n}''$ suficient de mari, putem presupune că $\overline{n}' > n''$ şi $\overline{n}'' > n'$.

Înmulţind inegalitatea (5.5) cu $|b_p|$ şi inegalitatea (5.6) cu $|a_q|$, deducem

$$|a_p b_q - a_q b_p| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ pentru } p > \overline{n}', \; q > \overline{n}'',$$

$$|a_q b_q - a_q b_q| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ pentru } p > \overline{n}', q > \overline{n}''.$$

Fie n cel mai mare dintre numerele $\overline{n}'$, $\overline{n}''$; deducem că pentru $p > n$, $q > n$, avem

$$|a_p b_p - a_q b_q| = |a_p b_p - a_q b_q + a_q b_p - a_q b_q| \leqslant$$
$$\leqslant |a_p b_p - a_q b_p| + |a_q b_p - a_q b_q| < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează afirmaţia II.

Mulţimea tuturor şirurilor de numere raţionale, împreună cu adunarea şi înmulţirea, este un inel S.

Propoziţiile I şi II demonstrate arată că şirurile fundamentale formează un subinel F al lui S.

5.6.3. *Şiruri convergente către zero.* Acestea sînt şiruri fundamentale particulare $\{a_n\}$ caracterizate prin proprietatea: fiind dat ε, există $n(\varepsilon)$ astfel încît, dacă $p > n\ (\varepsilon)$, atunci

$$|a_p| < \varepsilon.$$

Ca să exprimăm că şirul $\{a_n\}$ este convergent către zero, scriem $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ sau $\lim a_n = 0$.

Exemple de şiruri convergente către zero

1) Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \frac{1}{n}$: dat fiind ε raţional sau pozitiv, fie $n(\varepsilon)$ un număr natural mai mare decît $\frac{1}{\varepsilon}$; dacă $p > n(\varepsilon)$,

$$\left|\frac{1}{p}\right| = \frac{1}{p} < \frac{1}{n(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

2) Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este de asemenea convergent către zero.

3) Şirul $\{a_n\}$ cu $a_n = 0$ este evident un şir convergent către zero.

Şirurile convergente către zero au următoarele proprietăţi:

III. Dacă $\lim a_n = 0$ şi $\lim b_n = 0$, atunci

$$\lim (a_n - b_n) = 0.$$

Într-adevăr dat fiind $\varepsilon > 0$, există un $n(\varepsilon)$ astfel încît

$|a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_p| < \frac{\varepsilon}{2}$, pentru $p > n(\varepsilon)$; rezultă

$$|a_p - b_p| < |a_p| + |b_p| < \varepsilon,$$

ceea ce arată că şirul $\{a_n - b_n\}$ este convergent către zero.

Proprietatea III arată că şirurile convergente către zero formează un subgrup al lui F.

IV. Dacă $\lim a_n = 0$ şi $\{b_n\}$ este un şir fundamental, atunci $\lim a_n b_n = 0$.

Într-adevăr, şirul $\{b_n\}$ este mărginit; prin urmare, există un număr raţional M şi un număr natural n' astfel încît

$$|b_p| < M \text{ pentru } p > n'.$$

De asemenea, deoarece $\lim a_n = 0$ pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $n(\varepsilon)$ astfel încît $|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}$, pentru $p > n(\varepsilon)$.

Să însemnăm cu n cel mai mare dintre numerele n' şi $n(\varepsilon)$. Pentru $p > n$, avem

$$|a_p b_p| < |a_p| M < \varepsilon.$$

Proprietatea IV împreună cu proprietatea III a şirurilor convergente către zero se exprimă pe scurt spunînd că aceste şiruri formează un *ideal* în inelul F al şirurilor fundamentale.

Să considerăm următoarea relaţie binară E în F : şirurile $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ se găsesc în relaţia E dacă şi numai dacă şirul $\{a_n - b_n\}$ este convergent către zero.

Relaţia E este o relaţie de echivalenţă deoarece : 1) este reflexivă (orice şir este în relaţia E cu el însuşi) ; 2) este simetrică (dacă şirul $\{a_n - b_n\}$ este convergent către zero, şirul $\{b_n - a_n\}$ este şi el convergent către zero) ; 3) este tranzitivă (dacă şirul $\{a_n - b_n\}$ este convergent către zero şi $\{b_n - c_n\}$ este convergent către zero, şirul $\{a_n - c_n\} = \{a_n - b_n\} + \{b_n - c_n\}$ este convergent către zero).

Să considerăm factorizarea $\frac{F}{E}$ a mulţimii şirurilor fundamentale prin relaţia E şi să notăm cu R mulţimea factor $R = \frac{F}{E}$. Elementele mulţimii R sînt clase de echivalenţă de şiruri fundamentale modulo relaţia E. Vom nota aceste clase cu a, b, c etc.

Pe mulţimea R se poate defini, în mod natural, o structură de grup aditiv, ţinînd seama că această mulţime este factorizarea grupului aditiv F prin subgrupul şirurilor convergente către zero sau, raţionînd direct, adică numind suma a două clase a şi b clasa şirului fundamental $\{a_n + b_n\}$, care se obţine adunînd un şir $\{a_n\}$ din clasa a cu un şir $\{b_n\}$ din clasa b.

Înlocuind şirul $\{a_n\}$ cu un alt şir $\{a'_n\}$ din aceeaşi clasă a, clasa şirului $\{a'_n + b_n\}$ rezultă identică cu clasa şirului $\{a_n + b_n\}$, căci şirul $\{a'_n + b_n - a_n - b_n\} = \{a'_n - a_n\}$ este un şir convergent către zero. Acelaşi lucru se întîmplă dacă înlocuim şirul $\{b_n\}$ cu orice şir din clasa sa.

În această argumentare se recunoaşte demonstraţia de la construcţia grupului factor. Mai mult, pe grupul R se poate defini o structură de inel. Anume, vom numi produsul a două clase a şi b clasa şirului fundamental $\{a_n b_n\}$ care se obţine înmulţind un şir $\{a_n\}$ din clasa a cu un şir $\{b_n\}$ din clasa b.

Înlocuind şirul $\{a_n\}$ cu un alt şir $\{a'_n\}$ din clasa a, clasa şirului $\{a'_n b_n\}$ rezultă identică cu clasa şirului $\{a_n b_n\}$, deoarece şirul $\{a'_n b_n - a_n b_n\} = \{(a'_n - a_n) b_n\}$ este un şir convergent către zero. Într-adevăr acest şir este produsul unui şir $\{a'_n - a_n\}$ convergent către zero cu un şir fundamental.

În acelaşi mod se arată că, înlocuind şirul $\{b_n\}$ cu unul $\{b'_n\}$ din aceeaşi clasă, clasa şirului $\{a_n b'_n\}$ rezultă identică cu clasa şirului $\{a_n b_n\}$. Vom numi această clasă *produsul clasei a cu clasa b*, notînd-o cu ab.

Cu aceste operaţii de compunere se dovedeşte uşor că R este un inel comutativ. Este destul să arătăm că înmulţirea este asociativă şi distributivă faţă de adunare.

Înmulţirea este asociativă : dacă c este un element al lui R şi dacă $\{c_n\}$ este un şir din clasa c, $(ab)\,c$ este clasa şirului $\{(a_n b_n)\,c_n\} = \{a_n (b_n c_n)\}$. Dar clasa şirului $\{a_n (b_n c_n)\}$ este $a(bc)$; prin urmare, avem egalitatea $(ab)\,c = a(bc)$.

Înmulţirea este distributivă faţă de adunare. Într-adevăr $a(b+c)$ este clasa şirului $\{a_n (b_n + c_n)\}$. Dar avem $a_n (b_n + c_n) = a_n b_n + a_n c_n$, iar clasa şirului $\{a_n b_n + a_n c_n\}$ este $ab + ac$; astfel $a(b + c) = ab + ac$.

Prin urmare, R este inel care mai este şi comutativ, deoarece ab este clasa şirului $\{a_n b_n\} = \{b_n a_n\}$; se vede că ea coincide cu ba. Inelul R are element 1, anume clasa şirului $\{a_n\}$ cu $a_n = 1$.

5.6.4. *Inelul R este corp.* Într-adevăr, fie a un element nenul din R. Orice şir fundamental $\{a_n\}$ din clasa a nu converge către zero, adică nu există un n_0 natural, astfel încît să putem scrie $|a_n| < \varepsilon$ pentru orice ε raţional pozitiv şi pentru orice $n > n_0$. Cu alte cuvinte, pentru orice şir fundamental $\{a_n\}$ din a există un număr raţional pozitiv r' şi pentru orice n' există un număr natural $n > n'$ astfel încît $|a_n| \geqslant r'$.

Şirul $\{a_n\}$ fiind fundamental, pentru orice număr raţional pozitiv ε există n'' natural astfel încît $|a_p - a_q| \leqslant \varepsilon$ pentru orice $p > n''$ şi $q > n''$. (Putem presupune pe ε pozitiv oricît de mic, deci $\varepsilon < r'$).

Rezultă că $|a_p| = |a_n - (a_n - a_p)| \geqslant |a_n| - |a_n - a_p| \geqslant r' - \varepsilon$, pentru orice $p > n''$.

Deci există $r = r' - \varepsilon$ şi $\overline{n} \geqslant n''$ astfel încît $|a_p| \geqslant r$, oricare ar fi $p > \overline{n}$.

Observăm că şirul $\{a'_n\}$, care se deduce din $\{a_n\}$ prin înlocuirea eventualilor termeni nuli (în număr finit) cu 1, este tot un şir fundamental şi face parte din aceeaşi clasă a (diferenţa dintre aceste două şiruri este un şir convergent către zero, deoarece are termenii de rang mai mare ca $\overline{n}$ egali cu zero : $a'_n = a_n$ pentru $n > \overline{n}$).

Şirul $\{a'_n\}$ are toţi termenii diferiţi de zero ; prin urmare, putem considera şirul $\left\{\frac{1}{a'_n}\right\}$.

Observăm acum că şirul $\left\{\frac{1}{a'_n}\right\}$ este un şir fundamental. Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar şi să punem $\varepsilon' = \varepsilon r^2$. Atunci există un număr natural $n(\varepsilon') > \overline{n}$, astfel încît să avem $|a'_p - a'_q\}| = |a_p - a_q| \leqslant \varepsilon'$, pentru $p > n(\varepsilon')$ şi $q > n(\varepsilon')$. Rezultă că pentru $p > n(\varepsilon')$, $q > n(\varepsilon')$, avem

$$\left|\frac{1}{a'_p} - \frac{1}{a'_q}\right| = \left|\frac{1}{a_p} - \frac{1}{a_q}\right| = \frac{|a_p - a_q|}{|a_p\, a_q|} \leqslant \frac{r^2 \varepsilon}{r^2} = \varepsilon.$$

Pe de altă parte, şirul $\left\{a_n \frac{1}{a'_n}\right\}$ face parte din clasa unitate 1. Aceasta arată că elementul nenul $a \in R$ are un invers a^{-1}, anume clasa şirului $\left\{\frac{1}{a'_n}\right\}$, unde $\{a'_n\}$ este şirul care se deduce din $\{a_n\}$ înlocuind eventualii termeni nuli, care sînt în număr finit, cu nişte numere raţionale arbitrare dar diferite de zero (de exemplu 1), ceea ce nu-i schimbă clasa.

5.6.5. *Scufundarea lui Q în R.* Există o injecţie a corpului Q în R; anume aceea care asociază fiecărui număr raţional r clasa $\hat{r}$ a şirului $\{a_n\}$ cu $a_n = r$ pentru toţi n. E clar că aplicaţia astfel definită asociază sumei $r_1 + r_2$ a două numere raţionale clasa $\widehat{r_1 + r_2} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, suma claselor asociate lui r_1 şi r_2. Această aplicaţie asociază produsului $r_1 r_2$ clasa $\widehat{r_1 r_2} = \bar{r}_1 \bar{r}_2$, conform definiţiei produsului claselor şi înmulţirii şirurilor. Astfel această aplicaţie este un omomorfism al inelului Q în R şi, prin urmare, al corpului Q în R.

Acest omomorfism este injectiv, căci egalitatea $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$ implică $r_1 = r_2$ (faptul că şirul $r_1 - r_2$, $r_1 - r_2$, ..., $r_1 - r_2$, ... este convergent către zero se traduce prin $r_1 = r_2$). De aceea corpul Q se identifică cu imaginea sa în R prin omomorfismul injectiv $r \mapsto \hat{r}$ şi nu mai distingem între r şi $\hat{r}$, iar omomorfismul însuşi se numeşte *scufundarea* (canonică sau naturală) a lui Q în R. În felul acesta Q este considerat ca un subcorp al lui R, subcorpul numerelor raţionale; se scrie $Q \subset R$. Elementele lui R, care nu sînt cuprinse în Q şi care nu sînt numere raţionale, se numesc *numere iraţionale.*

Elementele lui R, raţionale sau iraţionale, se numesc *numere reale.*

Astfel, spunem numărul real 5, înţelegînd prin aceasta clasa şirului 5, 5, 5, ..., numărul real $\sqrt{2}$, înţelegînd prin aceasta clasa şirului $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \ldots$ format cu numerele raţionale care se obţin prin operaţia de extragere a rădăcinii pătrate din 2; numărul real π, înţelegînd prin aceasta clasa şirului de numere raţionale care se obţin, de exemplu, în modul următor: se consideră hexagonul regulat înscris în cerc şi raportul perimetrului acestui hexagon către diametru $\frac{6R}{2R} = 3$; se consideră apoi poligonul regulat cu $2 \times 6 = 12$ laturi şi raportul $\frac{12 l_{12}}{2R}$, calculat cu o zecimală exactă şi tot astfel rapor-

tul $\frac{2^n \cdot 6 l_{2^n \cdot 6}}{2R}$ dintre lungimea poligonului regulat cu $2^n \cdot 6$ laturi către diametru, calculat cu n zecimale exacte etc.

La fel numărul real e este clasa şirului de numere raţioanale

$$1 + \frac{1}{1} = 2, \quad \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}, \ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$$

5.6.6. *Relaţia de mărime în corpul numerelor reale.* Un şir fundamental $\{a_p\}$ se numeşte pozitiv dacă există un număr raţional $\varepsilon > 0$ şi un număr natural n, astfel încît $a_p > \varepsilon$ pentru orice $p > n$.

Suma a două şiruri, dintre care unul este pozitiv iar celălalt convergent către zero, este tot un şir pozitiv. Într-adevăr dacă $\{a_p\}$ este pozitiv şi $\{b_p\}$ convergent către zero, atunci există un n astfel încît

$$a_p > \varepsilon \text{ şi } b_p < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pentru } p > n.$$

Rezultă că pentru $p > n$, avem

$$a_p + b_p \geqslant a_p - |b_p| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2},$$

prima inegalitate rezultînd din faptul că $b_p + |b_p| \geqslant 0$.

Prin urmare, dacă într-o clasă a unul dintre şiruri este pozitiv, atunci toate şirurile din acea clasă sînt pozitive. De aceea, în acest caz se spune că clasa a este pozitivă sau numărul real a este pozitiv. Astfel numărul real $\sqrt{2}$ este pozitiv, deoarece şirul $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \ldots$ din clasa $\sqrt{2}$ este format din numere raţionale mai mari ca 1; la fel e este pozitiv căci termenii şirului $1 + \frac{1}{1}, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \ldots$ $\ldots, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \ldots$ sînt toţi mai mari ca 2.

Fie a şi b două numere reale pozitive; aceasta înseamnă că orice şir $\{a_p\}$ din clasa a şi orice şir $\{b_p\}$ din clasa b este pozitiv, adică există numere raţionale ε şi η pozitive şi un întreg natural n astfel încît pentru $p > n$, avem $a_p > \varepsilon$, $b_p > \eta$.

Deci, pentru $p > n$,

$$a_p + b_p > \varepsilon + \eta \text{ şi } a_p b_p > \varepsilon\eta,$$

ceea ce arată că numerele reale $a + b$ și ab sînt pozitive : suma și produsul a două numere reale pozitive sînt pozitive ; inversul unui număr real pozitiv este pozitiv.

Un număr real c este negativ dacă este pozitiv numărul $-c$.

Singurul număr real care nu este nici pozitiv nici negativ este zero.

Într-adevăr, să presupunem că a este un număr real și că nici a, nici $-a$ nu sînt pozitive. Aceasta înseamnă că orice șir fundamental $\{a_n\}$ din clasa a nu este pozitiv, adică pentru orice număr rațional $\varepsilon > 0$ și pentru orice număr natural n, există un număr natural $r > n$ cu $a_r < \varepsilon$. Deci nici șirul $\{-a_n\}$ nu este pozitiv, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ și n natural, există un număr natural $s > n$ cu $-a_s < \varepsilon$. Dar șirul $\{a_n\}$ fiind fundamental, există un număr natural n astfel încît pentru $p > n$, $q > n$, avem

$$|a_p - a_q| < \varepsilon, \text{ adică } -\varepsilon < a_p - a_q < \varepsilon.$$

Rezultă, punînd $q = r$, că pentru orice $p > n$

$$a_p = (a_p - a_r) + a_r < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

La fel punînd $q = s$, pentru orice $p > n$

$$-a_p = (a_s - a_p) - a_s < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Ultimele două inegalități arată, că

$$|a_p| < 2\varepsilon, \text{ pentru } p > n.$$

Astfel este demonstrat că dacă șirul $\{a_n\}$ nu este nici pozitiv, nici negativ, atunci acest șir converge către zero ; clasa sa este numărul real zero. Vom însemna cu R^+ mulțimea numerelor reale pozitive și cu R^- mulțimea numerelor reale negative. Din cele arătate rezultă că orice număr real este pozitiv, sau negativ, sau egal cu zero, fiecare dintre aceste posibilități excluzînd pe celelalte două. Altfel spus, putem scrie $R = R^+ \cup \{0\} \cup R^-$, cele trei mulțimi R^+, $\{0\}$, și R^- fiind disjuncte două cîte două.

Definiția relației de mărime. Vom spune că numărul real a este mai mic decît numărul real b, scriind $a < b$ sau $b > a$ (b mai mare ca a), dacă diferența $b - a$ este un număr real pozitiv : $a < b$ dacă $b - a \in R^+$. De aici rezultă că zero este mai mic decît orice număr real pozitiv ($x \in R^+$ implică $0 < x$). Orice număr real negativ este mai mic decît zero : $x \in R^-$ implică $-x \in R^+$, $0 - x \in R^+$, $x < 0$.

Se verifică îndată că $x < y$ și $y < z$ implică $x < z$ (dacă $y - x \in R^+$ și $z - y \in R^+$, atunci $z - x = (z - y) + (y - x) \in R^+$).

Dacă $x < y$ sau $x = y$, adică dacă $y - x \in R^+ \cup \{0\}$, se scrie $x \leqslant y$.

Din $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x$ rezultă $x = y$ ($y - x \in R^+ \cup \{0\}$ şi $x - y \in R^+ \cup \{0\}$ implică $x - y = 0$: nu poate fi $y - x \in R^+$ şi $x - y \in R^+$, adică $y - x \in R^-$, căci R^+ şi $R^- = \emptyset$).

Relaţia de mărime din corpul R este astfel o *relaţie de ordine*. Această relaţie este compatibilă cu legile de compunere din R:

Dacă a şi b sînt numere reale şi $a < b$, atunci $a + c < b + c$ oricare ar fi numărul real c.

Dacă $a < b$ şi $0 < c$, atunci $ac < bc$ [deoarece $b - a \in R^+$, $c \in R^+$ implică $c(b - a) \in R^+$, adică $c(b - a) > 0$]. De asemenea $a < b$, $0 < ab$ implică $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, după cum rezultă din proprietatea precedentă punînd $c = \frac{1}{ab}$.

Observăm că $a < b$, $ab < 0$ implică $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Din regula semnelor la înmulţire $(-a)(-b) = ab$, deducem că $(-a)^2 = a^2 > 0$ pentru orice număr real $a \neq 0$ (pentru că sau a, sau $-a$ este pozitiv).

Toate aceste proprietăţi se rezumă spunînd: *cu relaţia de mărime corpul R al numerelor reale este un corp ordonat.*

Scufundarea corpului Q în R este compatibilă cu relaţia de mărime: dacă a şi b sînt numere raţionale şi $a < b$, atunci şirul $a, a, a, \ldots$ este mai mic decît şirul $b, b, b, \ldots$ şi, prin urmare, clasa primului şir (pe care o notăm tot cu a) este mai mică decît clasa celui de-al doilea (pe care o notăm cu b).

Din faptul că orice şir fundamental este mărginit (superior şi inferior), rezultă că pentru fiecare număr real x există un număr raţional r mai mare şi unul mai mic ca x şi, prin urmare, un număr întreg $n > x$.

În corpul numerelor reale se poate da noţiunea de valoare absolută: se numeşte *valoare absolută* a unui număr real oarecare x numărul real nenegativ $|x|$ dat de formula

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ dacă } x < 0. \end{cases}$$

De asemenea, în R se poate da noţiunea de şir fundamental şi aceea de şir convergent către zero întocmai ca şi în Q.

Şirurile fundamentale cu elementele din R formează un inel R', iar cele convergente către zero formează un ideal I' în R'.

Fie a un număr real şi $\{a_p\}$ un şir fundamental de numere reale; dacă şirul $\{a_p - a\}$ este convergent către zero, se spune că *şirul* $\{a_p\}$ *este convergent către* a (converge către a) şi se scrie

$$\lim_{p\to\infty} a_p - a \quad \text{sau} \quad \lim a_p = a.$$

În particular, orice şir fundamental de numere raţionale se poate considera ca un şir fundamental de numere reale, în virtutea scufundării lui Q în R.

Se poate arăta că dacă şirul fundamental de numere raţionale $\{a_p\}$ aparţine clasei (numărului real) a, atunci $\{a_p\}$, considerat ca şir de numere reale, converge către a:

$$\lim a_p = a.$$

Într-adevăr, pentru orice ε real, există un ε' raţional pozitiv, mai mic decît ε şi un n natural, astfel încît, pentru orice $p > n$ şi $q > n$,

$$|a_p - a_q| < \varepsilon'.$$

Astfel putem spune că, pentru $p > n$ fixat, diferenţa dintre şirul constant $a_p = (a_p, a_p, \ldots)$ de numere reale şi şirul $a = (a_1, \ldots, a_p, a_{p+1}, \ldots)$ este un şir ai cărui termeni de rang mai mare ca n sînt cuprinşi între $-\varepsilon'$ şi $+\varepsilon'$; prin urmare, dacă $p > n$, avem

$$|a_p - a| \leqslant \varepsilon' < \varepsilon.$$

Aceasta înseamnă că diferenţa dintre şirul $\{a_p\}$ şi şirul constant $a, a, a, \ldots$ de numere reale este un şir convergent către zero, adică

$$\lim a_p = a$$

sau că elementele şirului $\{a_p\}$ *aproximează* numărul real a, mai precis că numărul raţional a_p *reprezintă numărul real* a *cu o aproximaţie mai mică decît* ε' (decît ε).

Observaţie. Pentru orice număr real pozitiv α, există un număr raţional r, astfel încît să putem scrie $0 < r < \alpha$.

Fie $\{a_p\}$ un şir fundamental din clasa α. Prin definiţie există un număr raţional $r > 0$ şi un număr natural n astfel încît, pentru orice $p > n$, să avem $a_p > r$. Prin urmare, şirul $\{a_p - r\}$ este pozitiv. Aceasta înseamnă că $\alpha - r > 0$, adică $0 < r < \alpha$.

Corolar. Fie x şi y două numere reale pozitive; există un număr natural n, astfel încît să putem scrie $nx > y$ (axioma lui Arhimede).

Într-adevăr, există un număr raţional $r = \frac{p}{q} \leqslant x$ şi un număr întreg $m > y$. Pe de altă parte, în mulţimea $\{r, 2r, 3r, \ldots\}$ există o

infinitate de numere întregi $p, 2p, \ldots$; deci în această mulțime există un întreg $nr > m$, de unde rezultă $nx > nr > m > y$.

5.6.7. *Corpul numerelor reale este complet.* Observăm că noțiunea de șir fundamental nu coincide cu aceea de șir convergent din analiză ; un șir convergent este un șir care are o limită, pe cînd un șir fundamental de numere raționale poate să nu aibă o limită în Q.

Astfel șirul $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ nu are o limită în Q.

Dacă ar fi $e = \frac{r}{s}$ cu r și s întregi ($s \geqslant 2$), atunci numărul

$$s!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{s!}\right) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \ldots$$

ar fi întreg. Dar

$$\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots\right) \leqslant \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{9} < 1,$$

ceea ce exclude egalitatea $e = \frac{r}{s}$.

La fel șirul $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \ldots$, care se obține prin extragerea rădăcinii pătrate din 2, este un șir fundamental de numere raționale, dar nu este convergent în Q.

Teorema lui Cauchy. *Orice șir fundamental de numere reale este convergent* (către un număr real).

Într-adevăr, fie $\{u_p\}$ un șir de numere reale. Dacă acest șir are numai un număr finit de elemente diferite între ele, atunci există un număr real u și un număr natural n, astfel încît avem $u_p = u$ pentru orice $p > n$ și deci $\lim u_p = u$. În acest caz teorema este demonstrată.

Să presupunem acum că numărul termenilor diferiți între ei din șirul $\{u_p\}$ este infinit. În acest caz ideea demonstrației este de a construi un șir fundamental de numere raționale $\{u'_p\}$ astfel încît șirul $\{u_p - u'_p\}$ să fie convergent către zero, de unde va rezulta că $\{u_p\}$ este convergent către numărul real lim u'_p.

În acest scop, să considerăm mai întîi șirul $\{u_{p\alpha}\}$ care se obține din $\{u_p\}$ lăsînd la o parte fiecare termen precedat de un termen egal cu el.

Astfel, din șirul $\{u_p\}$ cu $u_1 = 1$ și $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$, lăsînd la o parte termenii $u_3, u_5, \ldots$ egali cu $u_2, u_4, \ldots$ respectiv, se obține șirul $u_1, u_2, u_4, u_6, \ldots$ în care nici unul dintre termeni nu este egal cu precedentul.

Să însemnăm cu $v_1, v_2, \ldots$ termenii șirului $\{u_{p\alpha}\}$, deci șirul însăși cu $\{v_q\}$.

Observăm că $v_q = u_p$ cu $p \geqslant q$; șirul $\{v_q\}$ are o infinitate de termeni, deoarece fiecare termen din șirul $\{u_p\}$ apare și în șirul $\{v_q\}$.

Șirul $\{v_q\}$ este un șir fundamental, căci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un n, astfel încît

$$|v_q - v_{q'}| < \varepsilon,$$

pentru orice $q > n$ și $q' > n$. Într-adevăr,

$$|v_q - v_{q'}| = |u_p - u_{p'}| \text{ cu } p \geqslant q > n,\ p' \geqslant q' > n,$$

iar șirul $\{u_p\}$ este fundamental. Observăm, de asemenea, că șirul diferență $\{u_q - v_q\}$ este convergent către zero: pentru orice $\varepsilon > 0$ există un n astfel încît

$$|u_q - v_q| < \varepsilon$$

pentru $q > n$, deoarece $|u_q - v_q| = |u_q - u_p|$ cu $p \geqslant q$. Această argumentare arată că orice subșir al unui șir fundamental este fundamental și că diferența dintre un șir fundamental și un subșir infinit al său este un șir convergent către zero.

Observăm, în sfîrșit, că pentru orice q, $v_q \neq v_{q+1}$.

Șirul $\{v_q\}$ fiind fundamental, șirul $\{\varepsilon_q\}$ cu $\varepsilon_q = |v_q - v_{q+1}|$ este convergent către zero.

Amintim că fiecare element v_q este o clasă de șiruri fundamentale $v_{q1}, v_{q2}, \ldots$ formate cu numere raționale.

Fie, pentru fiecare q, u'_q un număr rațional (dintr-un șir $\{u_{qr}\}$ din clasa v_q), astfel încît să avem

$$|u'_q - v_q| < \varepsilon_q.$$

Pentru orice ε raţional pozitiv, există un n' natural, astfel încît pentru $p > n'$ şi $q > n'$ avem

$$|v_p - v_q| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

De asemenea există un număr natural n'', astfel încît pentru $q > n''$ avem $\varepsilon_q < \frac{1}{3}\varepsilon$. Fie $\overline{n} = \max(n', n'')$; pentru $p > \overline{n}$ şi $q > \overline{n}$ avem

$$|u'_p - u'_q| \leqslant |u'_p - v_p| + |v_p - v_q| + |v_q - u'_q| <$$

$$< \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Astfel, numerele raţionale u'_p formează un şir fundamental $\{u'_p\}$, care defineşte un număr real u', clasa sa.

Cum şirul $\{\varepsilon_q\}$ este convergent către zero şi $|u'_q - v_q| < \varepsilon_q$, rezultă că pentru orice ε real există un $\hat{n}$ natural astfel încît, pentru $q > \hat{n}$ să putem scrie

$$|v_q - u'_q| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |u'_q - u'| < \frac{\varepsilon}{2};$$

prin urmare

$$|v_q - u'| \leqslant |v_q - u'_q| + |u'_q - u'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Această inegalitate, împreună cu inegalitatea $|u_q - v_q| < \varepsilon$, pentru $q > n$ (putem presupune $n > \overline{n}$, $n > \hat{n}$) atrage după sine inegalitatea $|u_q - u'| < 2\varepsilon$ pentru $q > n$, n depinzînd numai de ε. Astfel rezultă demonstrat că şirul fundamental $\{u_p\}$ de numere reale este convergent către numărul real u', adică enunţul teoremei lui Cauchy.

În sfîrşit, în corpul numerelor reale se poate demonstra

Teorema marginii superioare. *Orice mulţime de numere real-nevidă şi majorată are o margine superioară reală* sup M.

Demonstraţie. Fie M o mulţime de numere reale nevidă şi majorată; fie m un majorant al lui M. Să notăm cu a un număr întreg mai mare decît m, prin urmare, un număr întreg, majorant al lui M. Fie x un număr real cuprins în M şi b un număr întreg mai mic decît x: $b < x < a$.

Să considerăm pentru fiecare număr natural p mulțimea $M_p = \{k \cdot 2^{-p} \mid b \leqslant k \cdot 2^{-p} \leqslant a\}$, formată din numere raționale de forma $\frac{k}{2^p}$, cuprinse în intervalul (b, a); aceste fracții sînt în număr finit mai mic sau egal cu $\frac{a-b}{2^p}$.

Fie u_p cel mai mic număr din M_p care este încă majorant pentru mulțimea M; prin urmare, $u_p - 2^{-p}$ nu mai este majorant pentru M.

Obținem astfel un șir de numere raționale $u_1, u_1, \ldots$ care are proprietatea că pentru $q > p$,

$$u_p - 2^{-p} < u_q \leqslant u_p . \tag{5.7}$$

Rezultă

$$-2^{-p} < u_q - u_p , \qquad u_p - u_q < 2^{-p},$$

prin urmare

$$|u_p - u_q| < 2^{-p},$$

adică pentru orice $p > n$ și $q > n$

$$|u_p - u_q| \leqslant |u_p - u_n| + |u_n - u_q| < 2 \cdot 2^{-n}.$$

Dar pentru orice ε, există un număr n, astfel încît să avem $2^{-n+1} < \varepsilon$ (adică $2^{n-1} > \varepsilon^{-1}$, căci mulțimea puterilor lui 2 este nemărginită). Aceasta înseamnă că șirul $\{u_p\}$ este un șir fundamental și deci definește un număr real u.

Din inegalitatea (5.7) rezultă inegalitatea

$$u_p - 2^{-p} \leqslant u \leqslant u_p , \tag{5.8}$$

pentru orice p. Fixînd numărul natural p, se observă că diferența $u_p - u_q$ dintre șirul (constant de la rangul p încolo)

$$u_1, \ldots, u_p , u_p , u_p , \ldots$$

și șirul $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}, u_p, u_{p+1} \ldots$ este un șir pozitiv care are termenii mai mici decît 2^{-p}.

Se poate arăta că u este o margine superioară pentru mulțimea M. Într-adevăr, dacă ar exista un număr x în M mai mare decît u, atunci ar exista un număr natural p, astfel încît să avem $2^p > (x-u)^{-1}$, adică $2^{-p} < x-u$. Adunînd această inegalitate, parte cu parte, cu $u_p - 2^{-p} < u$, deducem $u_p < x$ în contrazicere cu faptul că u_p este un majorant pentru M.

Se poate arăta în plus că u este cel mai mic majorant pentru M. Într-adevăr să presupunem că ar exista un v şi mai mic decît u. În acest caz ar exista un număr natural p astfel încît să putem scrie $2^{-p} < u - v$. Întrucît $u_p - 2^{-p}$ nu este majorant pentru M, există un $x \in M$ astfel încît $u_p - 2^{-p} < x$; deci $u_p - 2^{-p} < v$; de unde $u_p < u$, în contrazicere cu (5.8).

Astfel $u = \sup M$ şi teorema este demonstrată.

5.6.8. *Complemente şi exerciţii*

1. În practică, un număr real x este adesea definit prin două şiruri fundamentale de numere raţionale: unul crescător $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$ şi altul descrescător $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots$, astfel încît fiecare număr a_p din şirul crescător să fie mai mic decît numerele şirului descrescător (a_p sînt minoranţi pentru şirul $\{b_q\}$ şi b_q sînt majoranţi pentru şirul $\{a_p\}$) şi astfel încît pentru orice ε raţional pozitiv să existe un n natural cu proprietatea că pentru $p > n$ să fie $b_p - a_p < \varepsilon$ (şirul $\{b_p - a_p\}$ să fie convergent către zero). Rezultă că cele două şiruri sînt din aceeaşi clasă x în raport cu relaţia de echivalenţă E. Avem în R, $x = \lim a_p = \lim b_p$. Numerele a_p aproximează numărul real *prin lipsă*, iar b_p îl aproximează *prin adaos* şi $|a_p - x| < |a_p - b_p|$, $|b_p - x| < |a_p - b_p|$.

Exemple. $\sqrt{2}$ este aproximat prin lipsă de termenii şirului $\{a_p\}$ cu $a_1 = 1$; $a_2 = 1{,}4$; $a_3 = 1{,}41$; ... şi prin adaos de termenii şirului $\{b_q\}$ cu $b_1 = 2$, $b_q = 1{,}5$, $b_3 = 1{,}42$, ...

2. Fie a şi b două numere raţionale pozitive şi

$$a_1 = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}, \qquad b_1 = \frac{a+b}{2},$$

$$a_2 = \frac{a_1 b_1}{\frac{a_1 + b_1}{2}}, \ \ldots \qquad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ \ldots$$

Să se arate că şirurile $\{a_p\}$, $\{b_q\}$ sînt şiruri fundamentale, că b_q majorează şirul $\{a_p\}$ şi că ele definesc acelaşi număr real $\sqrt{ab}$. Ce se poate spune dacă a şi b sînt numere reale pozitive?

R. Presupunînd că $a < b$, se va observa că $a < a_1 < b_1 < b$, calculînd diferenţele $a_1 - a$, $b_1 - a_1$, $b - b_1$. Din aceste inegalităţi rezultă că şirul b, b_1, b_2, ... este descrescător şi b_q majorează şirul crescător $\{a_p\}$. Calculînd diferenţa $b_p - a_p$, se deduce că şirul $\{b_p - a_p\}$ este convergent către zero. Observînd că $a_p b_p = ab$, deducem că

$$\lim a_p = \lim b_p = \sqrt{ab}.$$

3. Să se calculeze $\sqrt{2}$ cu aproximație mai mică decît $\frac{1}{200}$, folosind șirurile $\{a_p\}$ și $\{b_q\}$ din exercițiul precedent.

Indicație. Se va porni cu $a = 1, b = 2$; se găsește că $\frac{24}{17}$ sau $\frac{17}{12}$ sînt aproximațiile căutate.

Un alt mod de a construi două șiruri a_p și b_q, care să definească un număr real α, rezultă din dezvoltarea în fracție continuă a lui α.

Fie $a_0 = [\alpha]$ cel mai mare întreg cuprins în α. Avem $0 \leqslant \alpha - a_0 < 1$ (semnul egalității are loc numai dacă α este întreg, caz pe care îl excludem ca fiind neinteresant). Astfel putem scrie $\alpha - a_0 = \frac{1}{\alpha_1}$ cu $\alpha_1 > 1$.

Fie din nou $a_1 = [\alpha_1]$ cel mai mare întreg cuprins în α_1; deci $0 \leqslant \alpha_1 - a_1 < 1$. Dacă $\alpha_1 = a_1$, avem $\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1}$, deci α este un număr rațional; să presupunem $\alpha_1 \neq a_1$ și să punem $\alpha - a_1 = \frac{1}{\alpha_2}$; rezultă că $\alpha_2 > 1$ și $\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$. Observăm că dacă $\alpha = \frac{p}{q}$, atunci $a_0, a_1, \ldots$ sînt cîturile de la algoritmul lui Euclid aplicat numerelor p și q pentru calculul c.m.m.d.c. al acestor numere.

Dacă α nu este rațional, șirul $a_0, a_1, \ldots$ este infinit, iar numerele raționale $\frac{A_0}{B_0} = \frac{a_0}{1}$, $\frac{A_1}{B_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$, $\frac{A_2}{B_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$, ..., formează un șir fundamental din clasa α; mai precis avem două șiruri fundamentale:

$\frac{A_0}{B_0} < \frac{A_2}{B_2} < \ldots$ și $\frac{A_1}{B_1} > \frac{A_3}{B_3} > \ldots$ astfel încît fiecare termen din șirul al doilea majorează primul șir, iar

$$\frac{A_{p+1}}{B_{p+1}} - \frac{A_p}{B_p} = \frac{(-1)^p}{B_p B_{p+1}},$$

de unde rezultă că $\alpha = \lim \frac{A_p}{B_p}$.

Exemplu. Fie $\alpha = \sqrt{2}$; $a_0 = [\sqrt{2}] = 1$ şi $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$, $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1+\sqrt{2}}{1} = 2 + \frac{1}{\alpha_2}$. Deoarece $\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\alpha_2}$, rezultă $\alpha_2 = \alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_3}$ cu $\alpha_3 = \alpha_2$ etc. Astfel obţinem dezvoltarea lui $\sqrt{2}$ în fracţie continuă

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}.$$

Avem

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{1}{1}, \frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{2}, \frac{A_2}{B_2} = \frac{7}{5}, \frac{A_3}{B_3} = \frac{17}{12} \ldots$$

Prin urmare

$$\frac{A_0}{B_0} = 1 < \frac{A_2}{B_2} = \frac{7}{5} = 1{,}4 < \ldots$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > \frac{A_3}{B_3} = \frac{17}{12} = 1{,}42 > \ldots$$

4. Să se dezvolte $\sqrt{3}$ în fracţie continuă, calculîndu-se fracţiile $\frac{A_p}{B_p}$, $0 \leqslant p \leqslant 3$.

Reprezentarea zecimală a numerelor reale

Fracţii zecimale periodice

5. Să se arate că şirul $\{a_p\}$ cu

$a_1 = 0{,}5$; $a_2 = 0{,}51$; $a_3 = 0{,}513$; $a_4 = 0{,}5131$,
$a_5 = 0{,}51313$; $a_6 = 0{,}513131$; $a_7 = 0{,}5131313, \ldots$

este fundamental şi că

$$\lim a_n = \frac{5}{10} + \frac{13}{10^3} : \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{5}{10} + \frac{13}{10^3} \cdot \frac{10^2}{99} = \frac{508}{990}.$$

În general şirul $\{a_n\}$ cu

$$a_n = \frac{u_1}{10} + \ldots + \frac{u_p}{10^p} + \frac{v_1}{10^{p+1}} + \ldots + \frac{v_q}{10^{p+q}} + \frac{v_1}{10^{p+q+1}} + \ldots +$$

$$+\frac{v_q}{10^{p+2q}}+\ldots+\frac{v_1}{10^{p+2q+1}}+\ldots+\frac{v_q}{10^{p+(n+1)q}}+\ldots$$

cu u_i şi v_i întregi din intervalul (0,9) converge către numărul raţional

$$a=\frac{u_1\ldots u_p v_1\ldots v_p-u_1\ldots u_p}{99\ldots9000\ldots0},$$

cîtul a două numere întregi, scrise în baza 10; numărătorul lui a este diferenţa a două numere scrise cu cifrele $u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots,v_q$, în scrierea zecimală obişnuită iar numitorul este în aceeaşi scriere, format de q cifre egale cu 9 urmate de p cifre egale cu 0.

6. Să se arate că orice fracţie zecimală periodică simplă este un număr raţional care, scris sub forma $\frac{p}{q}$ cu p şi q întregi primi între ei, are numitorul prim cu 10.

7. Orice fracţie zecimală periodică mixtă, cu partea neperiodică formată din m zecimale şi partea periodică formată din n zecimale, este un număr raţional $\frac{p}{q}$; dacă întregii p şi q sînt primi între ei, q este divizibil cu 2^m sau 5^m, dar nu cu puteri mai mari ale acestor numere.

8. Reciproc, orice număr raţional se poate scrie ca o fracţie zecimală periodică.

R. Fie $r=\frac{p}{q}$, unde q este prim cu 10 şi $p<q$. Să considerăm pentru fiecare n restul r_n al împărţirii lui 10^n prin q, $0\leqslant r_n<q$. Numărul termenilor distincţi din şirul $\{r_n\}$ este cel mult q; prin urmare, există două numere naturale n_1 şi $n_2>n_1$, astfel încît $r_{n_1}=r_{n_2}$; deci $10^{n_2}-10^{n_1}=10^{n_1}(10^{n_2-n_1}-1)$ este divizibil cu q adică

$$10^{n_2-n_1}-1=qc.$$

Astfel putem scrie $r=\frac{p}{q}=\frac{P}{10^n-1}$, cu $n=n_2-n_1$ şi $P=pc$, $(P<10^n-1)$.

Aşadar, $r=\frac{P}{10^n}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^n}}=\frac{P}{10^n}\left(1+\frac{1}{10^n}+\ldots\right)=\frac{P}{10^n}+\frac{P}{10^{2n}}+\ldots$ este fracţie zecimală periodică cu perioada formată din n cifre.

Fie $q=2^\alpha 5^\beta q'$ şi q' prim cu 10; fie m cel mai mare dintre α şi β; în acest caz, $10^m r=\frac{p'}{q'}$ are numitorul prim cu 10 şi deci putem scrie

$$10^m r=a_0+\frac{p''}{q'}$$

cu a_0 întreg pozitiv iar $\frac{p''}{q'}$ este fracție subunitară cu numitorul prim cu 10, ca în cazul precedent.

Astfel $10^m r = a_0 + \frac{P}{10^n} + \frac{P}{10^{2n}} + \ldots$ cu $P < 10^n$;

deci r este o fracție zecimală periodică mixtă cu partea neperiodică $\frac{a_0}{10^m}$ formată dintr-un întreg cînd $a_0 > 10^m$ și m zecimale și cu partea periodică P formată din n cifre.

9. Orice fracție zecimală definește un număr real.

R. Dacă $a, a_1 a_2 \ldots = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots$ (a și a_i fiind întregi, $0 \leqslant a_i \leqslant 9$) este fracția zecimală, ea definește numărul real, clasa șirului $\{u_p\}$ cu

$$u_0 = a,\ u_1 = a + \frac{a_1}{10},\ u_2 = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \ldots$$

Acest șir este fundamental, deoarece, presupunînd $q > p$,

$$|u_p - u_q| = \frac{1}{10^{p+1}}\left(a_{p+1} + \frac{a_{p+2}}{10} + \ldots + \frac{a^q}{10^{q-p-1}}\right) < \frac{1}{10^p}.$$

10. Să se arate că aplicația care asociază fiecărei fracții zecimale numărul real definit de ea nu este injectivă.

R. Observăm că 1 și 0,999... definesc în baza 10 același număr real 1; prin urmare, fracția zecimală finită $a_0, a_1 \ldots a_n$ și fracția zecimală periodică $a_0, a_1 \ldots (a_n - 1)\ 999\ldots$ definesc același număr real. În afară de această submulțime excepțională formată din fracțiile zecimale periodice cu perioada 9 și de fracțiile zecimale finite (cu perioada zero), aplicația din enunț este injectivă, deoarece dacă în fracțiile $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ și $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ avem $a_i = b_i$ pentru $i \leqslant r - 1$ și $a_r > b_r$, atunci $a_r \geqslant b_r + 1 > b_r$, $b_{r+1} b_{r+2} \ldots$ afară de cazul în care ar fi $b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = 9$, care a fost exclus; prin urmare

$$a_0, a_1 \ldots a_r a_{r+1} \ldots > b_0, b_1 \ldots b_r b_{r+1} \ldots;$$

deci numărul real reprezentat prin prima fracție zecimală este mai mare decît cel reprezentat prin cea de-a doua.

11. Orice număr real se poate reprezenta printr-o fracție zecimală. Altfel spus, orice număr real se poate aproxima oricît de mult prin fracții zecimale.

R. Fie α un număr real, care este clasa unui șir fundamental $\{a_p\}$. Fie b cel mai mic întreg care majorează șirul $\{a_p\}$ și $a = b - 1$. Avem $a \leqslant \alpha \leqslant b$. Lăsînd la o parte partea întreagă din α, putem presupune că $0 \leqslant \alpha < 1$. Atunci considerînd numerele $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$, α este cuprins între două numere de forma

$$\frac{a_1}{10} \text{ și } \frac{a_1 + 1}{10},\ a_1 \leqslant 9,\ \frac{a_1}{10} \leqslant \alpha.$$

Prin subîmpărțirea la 10 a intervalului $\left(\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right)$ găsim pe $a_2 \leqslant 9$ și

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2+1}{10^2}, \ldots$$

Se obține astfel un șir fundamental ale cărui elemente sînt aproximații tot mai bune ale numărului real α.

12. Dacă α este irațional, numărul zecimal $0, a_1 a_2 \ldots$ este unic determinat.

13. De asemenea, dacă α este irațional, fracția zecimală corespunzătoare nu este periodică și reciproc : fracțiile zecimale neperiodice definesc numere reale iraționale.

Astfel fracțiile zecimale

$$0{,}10100100010 \ldots, \quad 0{,}30300300030 \ldots$$

în care numărul de zerouri intercalate crește în progresie aritmetică definesc numere iraționale.

La fel fracția $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, în care a_n este egal cu 2 dacă n este prim și zero dacă n nu este prim, este un număr irațional (deoarece numerele prime formează o mulțime inifinită ; pe de altă parte, fracția nu este periodică căci dacă p este prim, nu există m astfel încît toate numerele $p + m$, $p + 2m$, $p + 3m$, ... să fie prime : $p + pm = p\,(1 + m)$ nu este prim).

14. Să se arate că orice număr real α se poate reprezenta sub forma

$$\alpha = a_1 + \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \ldots$$

cu a_n întregi și $0 \leqslant a_n < n$.

R. Se consideră cel mai mare întreg cuprins în α care se notează cu $a_1 = [\alpha]$, astfel încît $0 \leqslant \alpha - a_1 < 1$; prin urmare, $2(\alpha - a_1) < 2$. Considerăm apoi cel mai mare întreg a_2 cuprins în $2(\alpha - a_1)$, $a_2 = [2(\alpha - a_1)] < 2$; deci $0 \leqslant 2\left(\alpha - a_1 - \frac{a_2}{2}\right) < 1$.

Prin urmare $0 \leqslant 3!\left(\alpha - \frac{a_1}{1!} - \frac{a_2}{2!}\right) < 3$; punem

$$a_3 = \left[3!\left(\alpha - \frac{a_1}{1!} - \frac{a_2}{2!}\right)\right] < 3 ;$$

deci

$$0 \leqslant 3!\left(\alpha - \frac{a_1}{1!} - \frac{a_2}{2!} - \frac{a_3}{3!}\right) < 1 ;$$

punem

$$a_4 = \left[4!\left(\alpha - \frac{a_1}{1!} - \frac{a_2}{2!} - \frac{a_3}{3!}\right)\right] \text{ ş.a.m.d.}$$

Este clar că şirul $\{u_p\}$ în care

$$u_p = a_1 + \frac{a_2}{2!} + \ldots + \frac{a_p}{p!}$$

este fundamental şi că $\lim u_p = \alpha$.

15. Să se arate că reprezentarea precedentă a lui α este unică.

16. Să se arate că dacă α este raţional, termenii şirului $\{u_p\}$ din exerciţiul precedent sînt egali între ei, începînd de la un rang în sus, şi reciproc. Să se deducă de aici că numărul

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

este iraţional.

17. Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \pi$,

a) folosind reprezentarea zecimală a acestor numere

$$(\pi \approx 3{,}14159, \quad \sqrt{2} \approx 1{,}414, \quad \sqrt{3} \approx 1{,}732);$$

b) folosind definiţia lui π cu metoda perimetrelor ca limită a şirului format de semiperimetrele poligoanelor regulate cu 6, 12, 24 ... laturi circumscrise cercului de rază 1;

c) folosind metoda izoperimetrelor, după care $\frac{1}{\pi}$ apare ca limită comună a şirurilor $\{a_n\}$ şi $\{r_n\}$ ai căror termeni sînt legaţi prin relaţiile de recurenţă

$$a_{n+1} = \frac{a_n + r_n}{2}, \quad r_{n+1} = \sqrt{r_n\, a_{n+1}}, \quad a_0 = 0, \quad r_0 = \frac{1}{2}.$$

18. Să se arate că $e<3$, fără a folosi reprezentarea zecimală a lui e.

19. Fie x şi y numere reale şi $[x]$ partea întreagă din x; să se arate că

a) $[x + y] = [x] + [y] + \varepsilon$;

b) $[x - y] = [x] - [y] - \varepsilon$, cu $\varepsilon = 0$ sau 1;

c) $[x] + [x + y] + [y] \leqslant [2x] + [2y]$.

Dacă p este întreg pozitiv, atunci

d) $[x] + \left[x + \frac{1}{p}\right] + \ldots + \left[x + \frac{p-1}{p}\right] = [px]$,

e) $\left[\frac{[px]}{p}\right] = [x]$.

R. Fie $[x] = m$, $[y] = n$, $x = m + x_1$, $y = m + y_1$,

$0 \leqslant x_1 < 1$, $0 \leqslant y_1 < 1$.

a) $[x + y] = m + n + [x_1 + y_1]$ şi $0 \leqslant [x_1 + y_1] \leqslant 1$.

b) Se deduce din a) plecînd de la relaţia $x = (x-y)+y$.

c) Observăm că $[x + y] = m + n + [x_1 + y_1]$, $[2x] = 2m + [2x_1]$,

$[2y] = 2n + [2x_1]$ şi $[x_1 + y_1] \leqslant [2x_1] + [2y_1]$.

d) Este suficient să considerăm cazul $0 < x < 1$.

Fie $[px] = h$, $(h < p)$, $x = \frac{h}{p} + \frac{\alpha}{p}$ cu $0 \leqslant \alpha < 1$; rezultă

$$[x] + \left[x + \frac{1}{p}\right] + \ldots + \left[x + \frac{p-1}{p}\right] =$$

$$= \left[x + \frac{p-h}{p}\right] + \left[x + \frac{p-h+1}{p}\right] + \ldots + \left[x + \frac{p-1}{p}\right] =$$

$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{h \text{ ori}} = h = [px].$$

e) Fie $[x] = m$, $x = m + x_1$, $0 \leqslant x_1 < 1$. Rezultă

$$[px] = pm + [px_1], \quad \left[\frac{px}{p}\right] = m + \frac{[px_1]}{p} \quad \text{şi} \quad px_1 < p.$$

20. Dacă a şi b sînt numere reale şi $a<b$, există o infinitate de numere raţionale r situate în intervalul (a, b), $a < r < b$.

R. Fie $\{a_p\}$ un şir fundamental de numere raţionale cu $\lim a_p = a$ şi $\{b_q\}$ un şir analog cu $\lim b_q = b$; fie m şi n întregi pozitivi. Şirul $\{c_p\}$ cu $c_p = \frac{ma_p + nb_p}{m+n}$ este fundamental şi $\{b_p - c_p\}$, $\{c_p - a_p\}$

sînt şiruri fundamentale pozitive. Se deduce că există N astfel încît $a < c_p < b$, pentru $p > N$.

21. Să se arate că dacă $\{a_n\}$ şi $\{b_n\}$ sînt şiruri convergente de numere reale, atunci

$$\lim (a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n,$$

$$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n .$$

Indicaţie. Se vor considera şiruri fundamentale formate cu numere raţionale din clasele respective.

22. Să se arate că dacă a şi b sînt numere reale, atunci

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

23. *Inegalităţi elementare*

1. În cele ce urmează $a_1, a_2, \ldots$ sînt numere reale nenegative, iar $p, q, \ldots, t$ sînt numere naturale.

Din faptul că $a_1^p - a_2^p$ şi $a_1^q - a_2^q$ au acelaşi semn, se deduce uşor

$$a_1^{p+q} + a_2^{p+q} \geqslant a_1^p a_2^q + a_1^q a_2^p , \tag{1}$$

$$\frac{a_1^{p+q} + a_2^{p+q}}{2} \geqslant \frac{a_1^p + a_2^p}{2} \cdot \frac{a_1^q + a_2^q}{2} . \tag{2}$$

Prin recurenţă se deduce

$$\frac{a_1^{p+q+\ldots+t} + a_2^{p+q+\ldots+t}}{2} \geqslant \frac{a_1^p + a_2^p}{2} \cdot \frac{a_1^q + a_2^q}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{a_1^t + a_2^t}{2} . \tag{3}$$

În particular,

$$\frac{a_1^p + a_2^p}{2} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^p . \tag{4}$$

Pentru $p = 2$, relaţia (4) este echivalentă cu relaţia $a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2a_1 a_2$, care se traduce astfel: „media aritmetică a două numere pozitive este mai mare sau cel puţin egală cu media lor geometrică".

2. Dacă se consideră toate inegalităţile de forma (1) care se pot scrie pentru cele $n(n-1)/2$ perechi formate cu numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi se adună parte cu parte, obţinem

$$n \sum_{i=1}^{n} a_i^{p+q} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right) \tag{5}$$

sau

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+q}\right) \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum a_i^p\right)\left(\frac{1}{n}\sum a_i^q\right). \tag{6}$$

Această relație este o generalizare a lui (2); din ea deducem prin recurență

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{p+q+\ldots+l} \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^l\right). \tag{7}$$

În particular, punînd $p = q = \ldots = t = 1$, obținem

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^m;\ m = p + q + \ldots + t = 1 + 1 + \ldots + 1. \tag{8}$$

3. Media aritmetică a unor numere reale nenegative $x_1, \ldots, x_n$ este cel puțin egală cu media lor geometrică

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \tag{9}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă numerele sînt egale: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Inegalitatea (9) se poate demonstra prin inducție completă asupra lui n. Pentru $n = 2$ proprietatea este cunoscută. Să considerăm acum relația (1) pentru $p = 1$, $q = n-1$, pentru toate perechile a_i, a_j, $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ și să facem suma

$$(a_1^n + a_2^n) + (a_1^n + a_3^n) + \ldots + (a_1^n + a_n^n) +$$

$$+ (a_2^n + a_3^n) + \ldots + (a_2^n + a_n^n) + \ldots + (a_{n-1}^n + a_n^n) \geqslant$$

$$\geqslant (a_1 a_2^{n-1} + a_2 a_1^{n-1}) + (a_1 a_3^{n-1} + a_3 a_1^{n-1}) + \ldots + (a_1 a_n^{n-1} + a_n a_1^{n-1}) +$$

$$+ (a_2 a_3^{n-1} + a_3 a_2^{n-1}) + \ldots + (a_2 a_n^{n-1} + a_n a_2^{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} a_n^{n-1} + a_n a_{n-1}^{n-1}); \tag{10}$$

egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, după cum rezultă din (2). Regrupînd convenabil termenii și făcînd suma, în dreapta și în stînga semnului $\geqslant$, deducem

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n) \geqslant a_1(a_2^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1}) + a_2(a_1^{n-1} + a_3^{n-1} +$$

$$+ \ldots + a_n^{n-1}) + \ldots + a_n(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^n). \tag{11}$$

Prin ipoteza de inducție putem scrie

$$\begin{aligned} a_2^{n-1} + a_3^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} &\geqslant (n-1)\, a_2 a_3 \ldots a_n, \\ a_1^{n-1} + a_3^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1} &\geqslant (n-1)\, a_1 a_3 \ldots a_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_{n-1}^{n-1} &\geqslant (n-1)\, a_1 a_2 \ldots a_{n-1}; \end{aligned} \tag{12}$$

egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Relațiile (11) și (12) luate împreună ne dau

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n) \geqslant n(n-1)\, a_1 a_2 \ldots a_n; \tag{13}$$

egalitatea are loc, dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Punînd acum în (13) $a_1^n = x_1, \ldots, a_n^n = x_n$ și suprimînd factorul $n - 1$, deducem relația (9).

Relația (9) se poate demonstra și direct în felul următor. Să notăm cu g media geometrică a numerelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$g = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, atunci

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = x_1 = \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

Să presupunem că $x_1, \ldots, x_n$ nu sînt toate egale și fie x_1 cel mai mic și x_n cel mai mare dintre ele. Este posibil să fie mai multe numere egale cu x_1 sau cu x_n; în orice caz, în ipoteza că $x_1, \ldots, x_n$ nu sînt toate egale, rezultă $x_1 < g < x_n$ și $x_1 \neq g$, $x_n \neq g$.

Să considerăm numerele

$$x_1' = g, \quad x_n' = \frac{x_1 x_n}{g}.$$

Avem $x_1' x_n' = x_1 x_n$, dar

$$x_1' + x_n' - x_1 - x_n = \frac{g^2 + x_1 x_n - g x_1 - g x_n}{g} = \frac{(x_1 - g)(x_n - g)}{g} \leqslant 0. \tag{14}$$

Astfel, fără a modifica media geometrică, putem înlocui perechea formată din cel mai mic și din cel mai mare dintre numerele date, fie x_1, x_n, cu perechea x_1', x_n', în care unul dintre cele două numere este egal cu g. Prin aceasta media aritmetică descrește, deoarece $x_1' + x_2' \leqslant x_1 + x_n$.

Repetînd această operație cel mult de n ori, ajungem la un sistem de numere egale, toate cu g. Media geometrică și media aritmetică a acestora este egală cu g. Dar la fiecare pas suma numerelor obținute rezultă cel mult egală cu suma numerelor de plecare, după cum reiese din (14). Egalitatea are loc dacă și numai dacă unul dintre numerele înlocuite este egal cu g; dar în acest caz, numerele înlocuite fiind extreme, toate cele n numere trebuie să fie egale cu g, c.c.t.d.

24. Noțiunea de număr real a apărut și s-a clarificat treptat, pe măsură ce omenirea și-a lărgit sfera cunoștințelor în domeniul matematicii. Încă grecii au cunoscut numere iraționale ca $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ etc. Contribuții sistematice și de caracter destul de general au adus în studiul numerelor reale matematicienii ca Eudox, Euclid, Arhimede ș.a. Acestea erau bazate pe ideea de raport între mărimi de același fel.

Ideile matematicienilor greci despre număr au fost reluate și dezvoltate de către unii matematicieni din prima jumătate a secolului al XIX-lea ca Bertrand în al său Traité d'arithmétique.

În a doua jumătate a secolului al XIX-lea noțiunea de număr real a fost supusă unei adînci analize de către mari matematicieni ca Dedekind, care a elaborat începînd din 1858, o teorie a numerelor reale bazată pe ideea de secțiune, independent de ideea de mărime măsurabilă, publicată în 1872. Construcția prezentată în această carte are originea în teoriile lui Weierstrass, Cantor (1872), Méray, Heine [28], [30].

O construcție algebrică mai recentă a corpului real a fost formulată de către Artin și Schreier (1926) [18].

25. Să se spună care dintre mulțimile următoare sînt corpuri și care sînt inele, fără să fie corpuri. Mulțimile care sînt cuprinse în corpul numerelor complexe se presupun considerate cu operațiile de adunare și înmulțire din corpul complex:

1) Mulțimea numerelor întregi pare.

2) Mulțimea numerelor întregi divizibile cu un n dat.

3) Mulțimea numerelor de forma $a + b\sqrt{2}$ cu a și b raționale.

4) Mulțimea numerelor de forma $a + b\sqrt{3}$ cu a și b întregi raționale.

5) Mulțimea numerelor complexe $a + bi$ cu a și b raționale.

6) Mulțimea numerelor raționale de forma $\frac{a}{2^m}$ cu a și m întregi.

7) Mulțimea numerelor raționale de forma $\frac{a}{2^m 3^n}$ cu a, m, n întregi.

8) Mulțimea numerelor de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -2b & a \end{pmatrix}$ cu a și b raționale și cu operațiile de adunare și de înmulțire a matricelor.

R. Mulțimile (1), (2), (4), (6), (7) sînt inele, fără să fie corpuri, pentru că în fiecare dintre ele, există elemente care nu au element invers; să se indice de asemenea elemente inversabile din fiecare dintre aceste inele. Mulțimile (3), (5) și (8) sînt corpuri. Mulțimea (8) este un corp pentru că $a^2 + 2b^2 \neq 0$ pentru a și b raționale.

26. Să se dea și alte exemple de corpuri ca (3) și ca (9) și de inele ca (4), (6), (7).

Să se arate că matricele de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ cu a, b reale și cu adunarea și înmulțirea matricelor ca legi de compunere formează un corp izomorf cu corpul numerelor complexe.

Indicație. Se raționează ca la exercițiul următor.

27. Să se arate că matricele de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ cu a și b raționale și cu operațiile de adunare și de înmulțire a matricelor formează un corp izomorf cu corpul numerelor de forma $a+b\sqrt{3}$. Să se generalizeze.

R. Matricele din enunț sînt toate inversabile, căci $a^2 - 3b^2$ nu poate fi nul cu a și b raționali: din $a^2 - 3b^2$, eliminînd numitorii, obținem $m^2 - 3n^2 = 0$ cu m și n întregi. Putem presupune că m și n sînt numere prime între ele (ajungem la aceasta împărțind totul cu pătratul c.m.m.d.c. al lor). Din egalitatea $m^2 - 3n^2$ rezultă că 3 divide pe m^2; prin urmare $m = 3m'$. Dar atunci avem $3m^2 - n^2 = 0$, de unde deducem că n este divizibil cu 3, ceea ce este absurd.

Se verifică pe de altă parte că adunînd și înmulțind între ele matrice de forma dată se obțin matrice de aceeași formă. Izomorfismul se stabilește punînd $x = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$ iar $f(x) = a + b\sqrt{3}$ și observînd că f comută cu adunarea și înmulțirea din cele două corpuri; $f(x) = 0$ implică $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și că este aplicație pe.

Pentru generalizare, putem pune în locul lui 3 orice număr prim sau produs de numere prime la puteri nu toate pare.

28. Să se demonstreze că matricele de forma

$$X(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

cu a, b, c, d numere reale și matricele de forma

$$Y(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

cu $i = \sqrt{-1}$, formează corpuri izomorfe. Sînt comutative?

R. Se arată că matricele $X(a, b, c, d)$ formează un inel și se va observa că matricele $X(a, b, c, d)$, care nu sînt nule sînt inversabile; se arată același lucru despre matricele $Y(a, b, c, d)$. Apoi se arată că aplicația

$$X(a, b, c, d) \to Y(a, b, c, d)$$

comută cu adunarea și înmulțirea și că este o bijecție.

29. Să se arate că matricele diagonale

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

cu a, b, c reale formează un inel comutativ, care are element unitate dar care nu este inel de integritate. Care sînt divizorii lui zero în acest inel?

Indicație. Se arată că adunînd matrice de această formă și înmulțind asemenea matrice, obținem tot matrice diagonale (nu este nevoie să mai verificăm celelalte axiome ale inelului, căci sînt verificate în inelul matricelor pătrate de ordinul al treilea). Matricea zero și matricea unitate sînt de aceeași formă. Matricele pentru care $abc = 0$ sînt divizori ai lui zero.

§ 6. Spații vectoriale

6.1. Pe lîngă grupuri, inele și corpuri un loc important în matematică și fizică ocupă noțiunea de spațiu vectorial.

Definiție. Un grup comutativ, în scriere aditivă, se numește *spațiu vectorial* dacă există un corp C și o lege de compunere $C \times V \to V$, care asociază fiecărei perechi (a, x) cu $a \in C$ și $x \in V$ vectorul ax din V și care are următoarele proprietăți:

1. $a(x + y) = ax + ay$ (este distributivă față de adunarea vectorilor).
2. $(a + b)x = ax + bx$ (este distributivă față de adunarea în C).
3. $a(bx) = (ab)x$ (înmulțirea cu elemente din C este asociativă).
4. $1 \cdot x = x$.

În aceste formule x, y sînt elemente din V; a, b sînt elemente din C, iar 1 este elementul unitate din C.

Elementele spațiului vectorial se numesc *vectori*, iar elementele corpului C se numesc *scalarii* lui V; legea de compunere $(a, x) \to ax$ se numește *înmulțirea cu scalari* (este o lege de compunere externă). Corpul C se numește corpul scalarilor și ca să subliniem acest lucru, spunem: V este un spațiu vectorial cu scalari în C, sau un *spațiu vectorial peste corpul* C.

Vom considera adesea în loc de C corpul R al numerelor reale în acest caz se spune mai simplu: V este un *spațiu vectorial real*.

Exemple. 1. Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații liniare și omogene este un spațiu vectorial peste un corp care cuprinde coeficienții acestui sistem.

Astfel să considerăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ x \quad - z + 2t &= 0. \end{aligned}\right\}$$

În acest caz C este corpul numerelor raționale.

Dacă (x', y', z', t') și (x'', y'', z'', t'') sînt soluții ale acestui sistem, atunci și suma lor $(x' + x'', y' + y'', z' + z'', t' + t'')$ este o soluție, căci avem de exemplu

$$x' + x'' - (z' + z'') + 2\ (t' + t'') = 0$$

sau

$$(x' - z' + 2t') + (x'' - z'' + 2t'') = 0,$$

fiecare paranteză fiind egală cu zero.

De asemenea (ax', ay', az', at') este o soluție, oricare ar fi numărul rațional a:

$$ax' - az' + 2at' = a\,(x' - z' + 2z') = 0.$$

Condițiile 1—4 sînt satisfăcute, ceea ce se poate verifica.

2. Matricele cu m linii și n coloane, cu elemente numere reale, formează un spațiu vectorial real. Mulțimea acestor matrice este un grup față de adunare iar înmulțirea cu scalari a matricelor satisface condițiile 1—4.

3. Corpul C al numerelor complexe este un spațiu vectorial real: este un grup față de adunare și dacă a este real, iar $z = x + yi$, avem $az = ax + ayi$, iar această înmulțire satisface condițiile 1—4 conform regulilor de calcul în C.

4. Numerele de forma $a + b\sqrt{5}$, cu a şi b numere raţionale, formează un spaţiu vectorial peste corpul numerelor raţionale, în care înmulţirea cu scalari este dată de formula

$$r(a + b\sqrt{5}) = ra + rb\sqrt{5},$$

pentru orice r raţional.

Această formulă este conformă cu înmulţirea în corpul numerelor complexe, care cuprinde şi corpul numerelor raţionale şi corpul numerelor de forma $a + b\sqrt{5}$, cu a şi b raţionali.

5. Fiecare corp C este un spaţiu vectorial peste orice subcorp al său şi chiar peste el însuşi.

Structura de spaţiu vectorial a corpului C peste el însuşi se numeşte *dreapta* peste C; astfel se spune *dreapta reală* dacă ne referim la structura de spaţiu vectorial real al corpului numerelor reale; la fel se spune *dreapta complexă*, cînd ne referim la structura de spaţiu vectorial complex (cu scalari în corpul complex) a acestui corp. La fel se spune *dreapta raţională* etc.

6. Un exemplu important de spaţiu vectorial este următorul. Fie C un corp oarecare şi M o mulţime arbitrară. Să considerăm funcţiile definite pe M cu valori în C; acestea formează un spaţiu vectorial $V(M, C)$ cu scalari în C.

Suma $f + g$ a două funcţii f şi g din $V(M, C)$ se defineşte prin formula

$$(f+ g)(x) = f(x) + g(x),$$

iar înmulţirea cu elemente din C prin formula

$$(af)(x) = af(x), \quad a \in C.$$

Condiţiile 1—4 sînt îndeplinite după cum se verifică uşor astfel:

I. $a(f+ g)$ este funcţia care pentru orice x din M are valoarea dată de formula $(a(f + g))x = a((f + g)(x)) = a(f(x) + g(x))$. Dar în corpul C, înmulţirea este distributivă faţă de adunare, astfel încît putem scrie în continuare

$$(a(f + g))(x) = af(x) + ag(x) = (af)(x) + (ag)(x);$$

prin urmare

$$a(f + g) = af + ag.$$

II. De asemenea $(a + b) f$ este funcţia care, conform formulei de înmulţire cu scalari,

$$((a + b)f)(x) = (a + b)f(x).$$

Dar a, b, $f(x)$ sînt elemente ale lui C; prin urmare, putem scrie

$$(a + b)f(x) = af(x) + bf(x) = (af)(x) + (bf)(x) = (af + bf)(x).$$

Aceasta arată că

$$(a + b)f = af + bf.$$

III. De asemenea

$$(a(bf))(x) = a((bf))(x)) = a\ (bf(x)) = (ab)(f(x)) = (abf)(x),$$

pentru orice $x \in M$, deci

$$a(bf) = (ab)f.$$

IV. Din $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$ rezultă $1 \cdot f = f$.

Spaţiul acesta foarte general din punct de vedere conceptual se numeşte *spaţiul generat de M peste corpul C.*

Astfel corpul numerelor complexe ca spaţiu vectorial peste corpul real este generat de mulţimea $\{1, i\}$ peste R. Fiecare număr complex $z = x + yi$ se poate concepe ca o aplicţie $z : \{1, i\} \to R$, definită prin formulele

$$z(1) = x,\ z(i) = y.$$

De asemenea spaţiul format de numerele $a + b\sqrt{5}$ cu a şi b raţionale este generat de mulţimea $\{1, \sqrt{5}\}$ peste corpul Q al numerelor raţionale.

Fiecare număr $u = a + b\sqrt{5}$ se poate concepe ca o aplicaţie $u : \{1, \sqrt{5}\} \to Q$, definită prin formulele $u(1) = a$, $u(\sqrt{5}) = b$.

Dar se mai pot da şi alte exemple. Să considerăm mulţimea M a coloanelor unei matrice A cu elemente din corpul C. Spaţiul vectorial generat de această mulţime pe corpul C este spaţiul combinaţiilor liniare de coloanele matricei A. De aceea coloanele unei matrice se interpretează adesea ca vectorii; în acest sens se vorbeşte de suma a două coloane; se spune că o coloană depinde liniar de altele etc.

Tot astfel putem considera spaţiul vectorial generat de liniile unei matrice.

6.2. Se numeşte *subspaţiu* al unui spaţiu vectorial V orice subgrup V_1 al lui V care este şi spaţiu vectorial pentru înmulţirea cu scalari a lui V.

Astfel, dacă N este o parte a mulţimii M, spaţiul generat de N peste corpul C este un subspaţiu al spaţiului generat de M peste C, anume subspaţiul funcţiilor definite de M cu valori în C, dar nule pe complementara lui N în M.

O noțiune importantă și elementară din teoria spațiilor vectoriale este noțiunea de

6.3. **Dependență liniară.** Să considerăm un sistem de vectori $V_1, \ldots, V_m$ într-un spațiu vectorial V peste corpul C.

Definiție. Vectorii $v_1, \ldots, v_m$ se numesc liniar dependenți dacă există m scalari $a_1, \ldots, a_m$ *nu toți nuli*, astfel încît vectorul $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m$ să fie vectorul zero adică $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$; dacă astfel de scalari nu există, vectorii $v_1, \ldots, v_m$ se numesc liniar independenți.

Altfel spus $v_1, \ldots, v_m$ sînt liniar independenți dacă relația $a_1 v_1 + \ldots + a_m v_m = 0$ are loc numai pentru $a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0$.

Exemplu. În spațiul vectorial al soluțiilor ecuației

$$x - 3y + 5z - t = 0$$

soluțiile $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ și $v_2 = (2, 5, 2, -3)$ sînt liniar independente, deoarece soluția zero $av_1 + bv_2 = (0, 0, 0, 0)$ înseamnă $a + 2b = 0, 5b = 0, a - b = 0$, ceea ce cere $b = 0$, $a = 0$. Dimpotrivă, soluțiile v_1, v_2 și $v_3 = (5, 5, 2, 0)$ sînt liniar dependente pentru că

$$3v_1 + v_2 - v_3 = (0, 0, 0, 0).$$

De asemenea soluțiile v_2 și $v_4 = (4, 10, 4, -6)$ sînt liniar dependente pentru că

$$2v_2 - v_4 = (0, 0, 0, 0)$$

adică pentru că au componente proporționale: $\frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = 2$.

Astfel *proprietatea de a fi liniar dependenți pentru vectorii unui sistem este o generalizare a proprietății de a avea componentele proporționale pentru doi vectori liniar dependenți.*

Dacă vectorii $v_1, \ldots, v_m$ sînt liniar dependenți, orice ecuație de forma

$$av_1 + \ldots + a_m v_m = 0$$

se numește *relație de dependență liniară.*

Dacă într-o astfel de relație coeficientul a_m al vectorului v_m este diferit de zero, atunci putem scrie

$$v_m = b_1 v_1 + \ldots + b_{m-1} v_{m-1},$$

punînd $b_1 = -\frac{a_1}{a_m}, \ldots, b_{m-1} = -\frac{a_{m-1}}{a_m}$. În acest caz spunem că v_m este *liniar dependent* de $v_1, \ldots, v_{m-1}$ sau că este *o combinație liniară* de acești vectori sau *a vectorilor* $v_1, \ldots, v_{m-1}$ cu coeficienți în corpul scalarilor lui V.

Astfel, orice număr complex este o combinaţie liniară a numerelor complexe 1 şi i, $z = x + yi$, cu coeficienţi reali x şi y.

Trei numere complexe sînt totdeauna liniar dependente peste corpul real. De exemplu, fie $z_1 = 2-3i$, $z_2 = 1+5i$, $z_3 = 7-i$. Putem găsi trei numere reale a, b, c, astfel încît să avem $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$; este destul să avem $2a + b + 7c = 0$; $-3a + 5b - c = 0$. Rezolvînd acest sistem, găsim $a = -36$, $b = -19$, $c = 13$ sau orice alte trei numere proporţionale cu acestea.

Cu ajutorul noţiunii de spaţiu vectorial se înţelege şi se formulează mai uşor teoria sistemelor de ecuaţii liniare.

6.4. Fie sistemul liniar

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (6.1)$$

Să considerăm spaţiul liniar V generat de coloanele matricei coeficienţilor sistemului (6.1). Sistemul (6.1) are o soluţie dacă şi numai dacă coloana termenilor liberi aparţine acestui spaţiu, adică dacă este liniar dependentă de coloanele matricei coeficienţilor şi numai atunci. Cu alte cuvinte, sistemul (6.1) este compatibil dacă şi numai dacă matricele

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{şi} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

au acelaşi rang.

6.5. **Aplicaţii liniare.** Fie X şi Y două spaţii vectoriale cu scalari într-un corp K.

Se numeşte *omomorfism* al spaţiului vectorial X în spaţiul vectorial Y sau omomorfism de spaţiu vectorial al lui X în Y orice aplicaţie

$$h : X \to Y$$

care : a) este omomorfism pentru structurile de grup ale celor două spaţii şi b) comută cu înmulţire cu scalari. Deci h este omomorfism de spaţiu vectorial dacă

a) $h(x + y) = h(x) + h(y)$ şi

b) $h(sx) = sh(x)$,

pentru orice $x \in X$ şi $y \in X$ şi pentru orice $s \in K$.

Omomorfismele de spaţii vectoriale se mai numesc şi *aplicaţii liniare.*

Exemple. 1. Să considerăm în locul lui X spaţiul C al numerelor complexe, peste corpul real R şi aplicaţia Re care asociază fiecărui număr complex $x + iy$ partea sa reală $\mathrm{Re}\,(x + iy) = x$, adică proiecţia pe axa reală. Se verifică îndată că aplicaţia Re, adică această proiecţie, este o aplicaţie liniară : dacă punem

$$z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha\,,\ (\alpha = 1,\ 2),\ \text{avem}$$

$$\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,[x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)] = x_1 + x_2 = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2).$$

Dacă s este un număr real,

$$\mathrm{Re}\,(sz_1) = \mathrm{Re}\,(sx_1 + sy_1 i) = sx_1 = s\mathrm{Re}\,(z_1),$$

oricare ar fi numerele complexe z_1, z_2 şi numărul real s.

2. Să considerăm aceleaşi spaţii vectoriale C şi R ca în exemplul precedent şi aplicaţia $h : C \to R$ definită prin formula $h(x + iy) = x + y$. Se verifică uşor că şi aceasta este un omomorfism de spaţii vectoriale (o aplicaţie liniară). De exemplu :

$$h(sz) = sx + sy = s\,(x + y) = sh\,(z) \quad \text{şi la fel} \quad h(z_1 + z_2) = h(z_1) + h(z_2).$$

Dacă aplicaţia liniară este izomorfism pentru structura de grup a lui X, atunci se spune că este un izomorfism de spaţiu vectorial.

Astfel aplicaţia $\gamma : C \to C$ definită prin formula $\gamma\,(z) = \bar{z}$, (conjugatul lui z), este un izomorfism de spaţiu vectorial; de asemenea aplicaţia $\sigma : C \to C$, definită prin formula $\sigma(z) = -z$ este un izomorfism de spaţiu vectorial.

Mai general, fie V un spaţiu vectorial real şi r un număr real fix diferit de zero; aplicaţia $h : V \to V$ definită prin formula $h(v) = rv$ este un izomorfism de spaţiu vectorial, căci avem

$$h\,(v_1 + v_2) = r\,(v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2 = h\,(v_1) + h\,(v_2)$$

şi

$$h(sv) = r\,(sv) = (rs)\,v = (sr)\,v = s(\,rv) = sh\,(v),$$

de unde se vede că h este un omomorfism. Că h este un izomorfism de grup se verifică astfel : să presupunem că $h(v) = 0$. Aceasta înseamnă $rv = 0$; deoarece $r \neq 0$, rezultă $v = 0$. Prin urmare, nucleul lui h este format numai din vectorul zero. Astfel h este monomorfism (duce vectori diferiţi în vectori diferiţi).

Să verificăm că h este un omomorfism **pe.** Într-adevăr orice vector $v \in V$ este de forma $h(u)$, anume

$$h\left(\frac{1}{r}v\right) = r\left(\frac{1}{r}v\right) = v\,; \quad u = \frac{1}{r}v.$$

Cu aceasta este demonstrat că h este izomorfism de spaţiu vectorial

și se numește *omotelia* de raport r; omotetia h' de raport $\frac{1}{r}$ este inversa omotetiei h, după cum se vede din relațiile

$$h(h'(v)) = h\left(\frac{1}{r}v\right) = r\left(\frac{1}{r}v\right) = v \quad \text{și} \quad h'(h(v)) = \frac{1}{r}(rv) = v.$$

6.6. Spațiul vectorial al translațiilor planului

6.6.1. Un exemplu important de spațiu vectorial care se prezintă în geometria elementară este spațiul translațiilor planului.

Amintim că o translație este o transformare T a planului în el însuși, dată printr-un segment orientat OP (un segment între capetele căruia distingem : primul O și al doilea P) astfel încît oricărui punct M din plan îi corespunde un punct $M' = T(M)$ prin condiția : segmentul OM și segmentul PM' să fie laturile opuse ale unui paralelogram (în care celelalte două laturi opuse sînt OP și MM'). Astfel, unind fiecare punct N din planul cu imaginea sa $T(N)$, obținem segmente paralele cu OP, egale și de același sens, iar ON și $PT(N)$ sînt și ele paralele. În particular $P = T(O)$.

Segmentul OP determină translația T, dar translația T nu este determinată numai de segmentul OP; *orice* segment paralel, egal și de același sens cu OP determină translația T. Vom nota cu T_P translația corespunzătoare segmentului OP.

Dacă însă fixăm un punct O în plan, atunci segmentele orientate din plan care au primul capăt în O și translațiile planului se găsesc într-o corespondență bijectivă.

6.6.2. Să considerăm două translații T și S. Unui punct M din plan translația T îi asociază punctul $T(M)$; punctului $T(M)$ translația S îi asociază punctul $S(T(M))$. Ce legătură este între punctul M și punctul $S(T(M))$?

Pentru a stabili această legătură, să ne referim la segmentele OP și OQ, $[P = T(O), Q = S(O)]$, cu primul capăt în O, care definesc cele două translații (v. fig. 2).

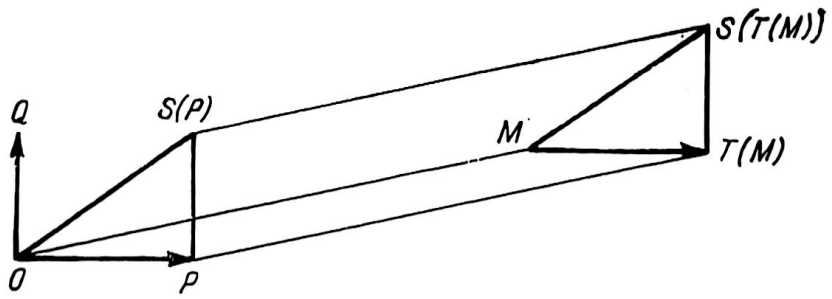


Fig. 2

Observăm că punctul $S(P)$ este al patrulea vîrf al paralelogramului $QOPS(P)$ şi că punctele M, $T(M)$, $S(T(M))$ formează un triunghi care are laturile paralele egale şi de acelaşi sens cu triunghiul $OPS(P)$. Punctele M, $T(M)$ şi $S(T(M))$ se deduc din O, P şi $S(P)$ respectiv prin translaţia determinată de OM. Astfel segmentul $MS(T(M))$ este paralel cu segmentul $OS(P)$, egal şi de acelaşi sens.

Aceasta înseamnă că punctul $S(T(M)) = (S \circ T)(M)$ se deduce din M printr-o translaţie determinată de segmentul $OS(P)$. Şi aceasta pentru orice punct M din plan ; înseamnă că transformarea $S \circ T$ este tot o translaţie şi anume translaţia determinată de segmentul $OS(P)$, diagonala paralelogramului care are ca laturi cu primul capăt în O segmentele OP şi OQ corespunzătoare translaţiilor S şi T. Aceasta ne arată că $T \circ S = S \circ T$. Compunerea translaţiilor este asociativă ca în general compunerea aplicaţiilor unei mulţimi în ea însuşi. Astfel, translaţiile planului formează un semigrup. În acest semigrup există element neutru : translaţia identică a planului corespunzătoare segmentului OO care lasă pe loc toate punctele din plan.

Inversa translaţiei determinată de segmentul OP este translaţia determinată de segmentul OP', notînd cu P' simetricul lui P faţă de O.

Astfel, *translaţiile planului formează un grup comutativ.* Vom scrie aditiv compunerea în acest grup : $S + T$ în loc de $S \cdot T$ şi vom nota cu $-T$ translaţia opusă lui T.

6.6.3. Identificînd grupul translaţiilor planului cu mulţimea segmentelor cu originea în O, putem defini pe mulţimea segmentelor *o structură de grup*, în care *compunerea* se face *după regula paralelogramului*, astfel încît operaţia de identificare (translaţie $\rightarrow$ segment de definiţie cu originea în O a translaţiei) să rezulte un izomorfism. În felul acesta se defineşte o structură de grup comutativ în scriere aditivă în planul în care am ales un punct O. Fiecare punct P al planului determină un *vector* OP (vectorul de poziţie al lui P) şi adunarea acestor vectori se face după regula paralelogramului : $OP + OQ$ este OR astfel încît $OPRQ$ să fie un paralelogram.

6.6.4. În grupul vectorilor de poziţie se poate defini o *structură de spaţiu vectorial real* în modul următor :

Să considerăm omotetiile de centru O. Pentru fiecare număr real a, pozitiv sau negativ, este determinată o omotetie cu centrul în O, care asociază punctului P un punct P' situat pe dreapta OP : de aceeaşi parte a punctului O cu P dacă a este pozitiv şi de cealaltă parte dacă a este negativ, astfel ca $\dfrac{OP'}{OP} = a$.

Vom scrie $OP' = aOP$ şi vom spune că vectorul OP' este produsul dintre numărul real a şi vectorul OP.

Această operaţie de compunere îndeplineşte condiţiile 1—4 din definiţia spaţiului vectorial din 6.1:

1) Relaţia $(a + b) \cdot OP = a \cdot OP + b \cdot OP$ se demonstrează în modul următor: se consideră dreapta OP şi încă o dreaptă Δ prin O, pe care s-a fixat punctul 1, originea fiind O. Pe dreapta Δ

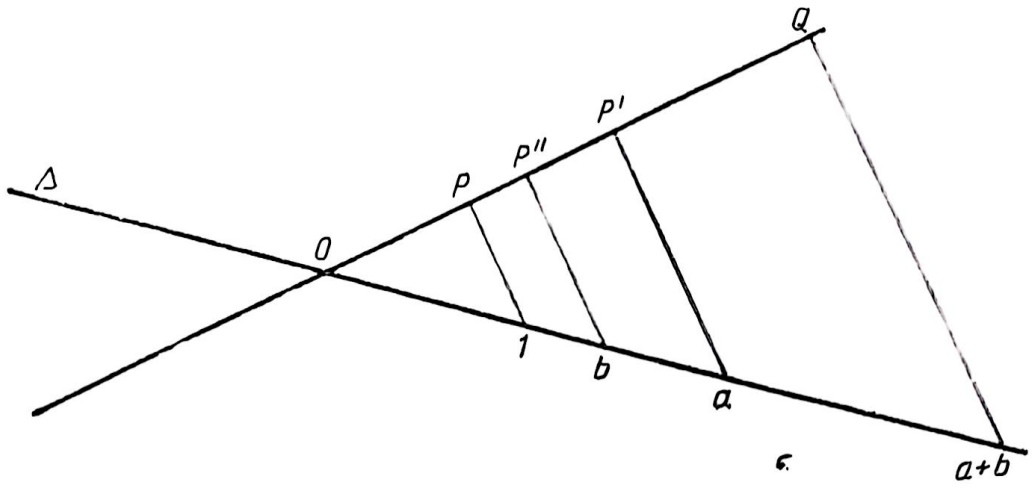


Fig. 3

să fixăm punctele de abscisă a, b şi $a + b$, în sistemul de coordonate stabilit. Unim punctul 1 de pe Δ cu P şi ducem paralele la dreapta $1P$ prin a, prin b şi prin $a + b$ respectiv. Avem $\frac{OQ}{a+b} = \frac{OP'}{a} =$ $= \frac{OP''}{b} = \frac{OP}{1}$, în virtutea teoremei fundamentale de asemănare. Avem pe de altă patrte $P'Q = OP''$ tot din cauza asemănării. Astfel $OQ = OP' + P'Q = OP' + OP''$. Dar $OQ = (a + b)OP$, $OP' = aOP$, $OP'' = bOP$, prin urmare, $(a + b)OP = aOP + bOP$. În figura 3, a şi b sînt amîndouă pozitive, dar raţionamentul se poate repeta în toate cazurile ($a > 0$, $b < 0$; $a < 0$, $b > 0$; $a < 0$, $b < 0$).

Se poate arăta uşor, folosind proprietăţile omotetiei, că punctele P, P', P'', Q nu depind de dreapta Δ şi nici de punctul unitate luat pe ea.

2. Relaţia $a(OP + OQ) = aOP + aOQ$ rezultă din fig. 4. Fie $OR = OP + OQ$, $OP' = aOP$, $OQ' = aOQ$, $OR' = aOR$.

Figura $OP'R'Q'$ este omotetică cu $OPRQ$. Dar $OPRQ$ este un paralelogram; prin urmare și $OP'Q'R'$ este un parelelogram. Înseamnă că $OR' = OP' + OQ'$, de unde obținem

$$a(OP + OQ) = aOP + aOQ.$$

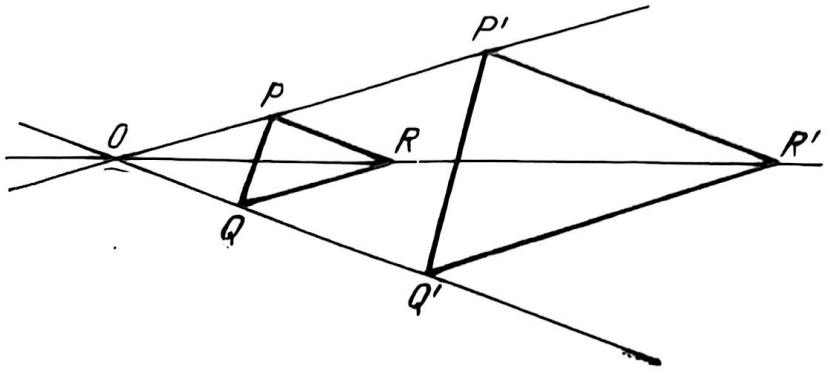


Fig. 4

6.6.5. O dată definită structura de spațiu vectorial a planului cu punctul ales O, se transferă această structură la grupul translațiilor, astfel încît izomorfismul de grup între cele două grupuri să devină izomorfism de spațiu vectorial; anume vom pune $aT_P = T_{P'}$, dacă $aOP = OP'$.

6.7. Exerciții

1. Se consideră sistemul de ecuații liniare omogene

$$x + 2y + 3z + 4t = 0,$$

$$x + y + z + t = 0.$$

a) Să se arate că soluțiile sale formează un spațiu vectorial.

b) Să se arate că soluțiile (1,—2, 1, 0) și (2,—3, 0,1) sînt liniar independente.

c) Să se considere o a treia soluție a sistemului dat și să se verifice că este liniar dependentă de acestea.

Indicație. a) A se vedea primul exemplu din text. b) Se scrie o combinație liniară a acestor soluții ($u + 2v$, $-2u - 3v$, u, v) și se pune condiția ca să fie nulă, adică să aibă nule toate componentele; rezultă $u = v = 0$, ceea ce arată independența liniară. Sau: soluțiile nu sînt formate din numere proporționale! c) Este de verificat că se obține orice soluție dînd lui u și lui v valori convenabile. Să se rezolve sistemul în raport cu x și y.

2. Se consideră ecuația

$$x + y + z + t = 0.$$

a) Să se arate că soluțiile sale formează un spațiu vectorial.

b) Să se arate că spaţiul soluţiilor sistemului de la exerciţiul 1 este un subspaţiu al acestuia.

c) Să se arate că $(-1, 1, 0, 0)$ $(0, -1, 1, 0)$, $(0, 0, -1, 1)$ sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei date.

d) Să se arate că soluţiile date în exerciţiul precedent sînt liniar independente de acestea.

Indicaţie. a) Aceeaşi indicaţie ca la exerciţiul precedent. b) Soluţiile sistemului de la exerciţiul 1 verifică ecuaţia dată. c) Se va considera o combinaţie liniară a soluţiilor date $(-u, u-v, v-w, w)$ şi se va egala cu soluţia nulă. d) Se arată că pentru u, v, w convenabile, se găsesc soluţiile date la exerciţiul 1 şi chiar soluţia generală a acelui sistem.

3. Să se arate că numerele de forma $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ cu a, b, c raţionali formează un spaţiu vectorial cu scalari în Q. Să se arate că în acest spaţiu vectorii 1, $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ sînt liniar independenţi.

R. Să presupunem că avem $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ cu a, b, c raţionali. Izolînd pe $c\sqrt{3}$ şi ridicînd la pătrat, avem $(a + b\sqrt{2})^2 = 3c^2$. Avem $a^2 + 2b^2 - 3c^2 + 2ab\sqrt{2} = 0$. Dar 1 şi $\sqrt{2}$ sînt liniar independenţi peste Q, prin urmare, $ab = 0$ şi deci $a^2 + 2b^2 - 3c^2 = 0$. Aceasta cere ca $a = 0$ şi deci $2b^2 - 3c^2 = 0$, ceea ce conduce la $b = 0$, $c = 0$; sau $b = 0$, ceea ce conduce la $a^2 - 3c^2 = 0$, $a = c = 0$. Egalitatea $2b^2 - 3c^2 = 0$ cu b, c raţionali cere $b = c = 0$, deoarece, altfel, eliminînd numitorii. am găsi o egalitate de aceeaşi formă cu b, c întregi primi între ei, ceea ce este absurd, La fel şi relaţia $a^2 - 3c^2 = 0$ cere $a = c = 0$.

4. Să se arate că 1, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$ sînt liniar independente peste corpul numerelor raţionale.

R. Fie a, b, c numere raţionale astfel încît

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} = 0. \tag{1}$$

Înmulţind cu $\sqrt[3]{2}$, deducem

$$2c + a\sqrt[3]{2} + b\sqrt[3]{4} = 0. \tag{2}$$

Înmulţind ecuaţia (1) cu b şi (2) cu c iar apoi scăzînd, deducem

$$(ab - 2c^2) + (b^2 - ac)\sqrt[3]{2} = 0. \tag{3}$$

Deoarece $\sqrt[3]{2}$ este iraţional, aceasta cere

$$ab - 2c^2 = 0, \quad b^2 - ac = 0. \tag{4}$$

Dacă $bc \neq 0$, înmulţind prima dintre aceste relaţii cu c iar cea de-a doua cu b, deducem

$abc = 2c^3 = b^3$, ceea ce este absurd, $\sqrt{2}$ fiind irațional (a se vedea 11.2). Astfel $bc = 0$, ceea ce împreună cu relațiile (4) cere $b = c = 0$ și deci $a = 0$.

5. Să se arate că din realația

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} = 0,$$

cu a, b, c numere raționale, rezultă

$$a = b = c = 0.$$

R. Se ridică la pătrat relația $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = -c\sqrt{5}$ și se obține $2a^2 + 3b^2 - 5c^2 + 2ab\sqrt{6} = 0$. Cum $\sqrt{6}$ nu este rațional (v. 6.11), aceasta cere

$$ab = 0, \quad 2a^2 + 3b^2 - 5c^2 = 0.$$

Rezultă fie $a = 0$, $3b^2 - 5c^2 = 0$; fie $b = 0$, $2a^2 - 5c^2 = 0$. Putem presupune că b, c în primul caz, a, c în al doilea caz sînt întregi și primi între ei. În amîndouă cazurile rezultă $a = b = c = 0$; altfel $\sqrt{15}$ sau $\sqrt{10}$ ar fi raționali.

6. Să se arate că 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{6}$ sînt liniar independente peste corpul numerelor raționale.

R. Să presupunem că avem relația

$$x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3} + t\sqrt{6} = 0$$

cu x, y, z, t raționali.

Această relație se poate scrie sub forma

$$x + y\sqrt{2} + (z + t\sqrt{2})\sqrt{3} = 0.$$

Să presupunem că $z + t\sqrt{2} \neq 0$; înmulțind cu $z - t\sqrt{2}$, deducem $(xz - 2yt) + (yz - xt)\sqrt{2} + (z^2 - 2t^2)\sqrt{3} = 0$. Conform celor arătate la exercițiul 3, avem $z^2 - 2t^2 = 0$; prin urmare $z = t = 0$, contradicție! Astfel $z + t\sqrt{2} = 0$, adică $z = t = 0$. Rezultă de aici că și $x = y = 0$.

6.8. Să considerăm planul în care am fixat un sistem de coordonate dreptunghiulare xOy.

Pe mulțimea segmentelor OP, cînd P parcurge întreg planul, a fost definită o structură de spațiu vectorial, în care adunarea se face după regula paralelogramului, iar înmulțirea cu orice scalar corespunde omotetiei de centru O și de raport r.

Să notăm cu V acest spațiu vectorial. Între spațiul vectorial C al numerelor complexe și spațiul vectorial real V rezultă definită o bijecție care asociază fiecărui număr complex $z = x + iy$ punctul P (x, y). Această bijecție este un izomorfism de spațiu vectorial, pentru că adunarea numerelor complexe se face după aceeași regulă a paralelogramului și înmulțirea numerelor complexe cu orice număr

real r revine tot la omotetia de centru O și de raport r. Dacă z_1 și z_2 sînt două numere complexe, atunci punctele P_1 și P_2 care le reprezintă în plan (afixele lor), împreună cu punctul P care reprezintă suma lor $z_1 + z_2$ și cu O formează un paralelogram în care O și P sînt vîrfuri opuse.

Prin urmare, conform legii de adunare în spațiul vectorial al segmentelor cu originea în O, putem scrie $OP = OP_1 + OP_2$. Astfel că, în corespondența care asociază fiecărui număr complex vectorul de poziție al afixului său, la suma $z_1 + z_2$ corespunde suma $OP_1 + OP_2$.

Dacă $z = x + iy$ are drept afix punctul $P(x, y)$ și dacă a este un număr real, atunci $az = ax + iay$ are drept afix punctul $P'(ax, ay)$ și $OP' = aOP$ (v. fig. 5).

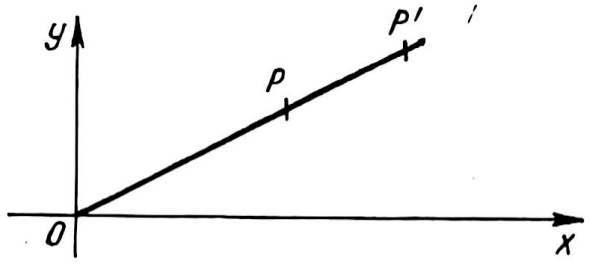


Fig. 5

Tocmai în baza acestui izomorfism se fac unele demonstrații în geometrie cu ajutorul numerelor complexe.

Exemple. Să se arate că dacă a și b sînt două numere complexe și A, B sînt afixele lor în planul xOy, mijlocul segmentului AB este afixul numărului $\frac{a+b}{2}$.

Să notăm cu C afixul numărului $a+b$; punctele O, A, B, C sînt vîrfurile unui paralelogram în care O și C sînt vîrfuri opuse; mijlocul segmentului AB coincide cu mijlocul diagonalei AC; prin urmare, acesta este punctul care reprezintă numărul complex $\frac{a+b}{2}$.

Mai general, dacă trei numere complexe a, b, c au afixele A, B, C, în linie dreaptă, atunci există trei numere reale r, s, t astfel încît $ra + sb + tc = 0$ iar $r + s + t = 0$ și reciproc.

Din geometria analitică se știe că dacă punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sînt în linie dreaptă, atunci avem

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + iy_1 & y_1 & 1 \\ x_2 + iy_2 & y_2 & 1 \\ x_3 + iy_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y_1 & 1 \\ b & y_2 & 1 \\ c & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd ultimul determinant după prima coloană, găsim o relaţie de dependenţă liniară între numerele complexe a, b, c şi anume

$$(y_2 - y_3)\, a + (y_3 - y_2)\, b + (y_1 - y_2)\, c = 0.$$

Aşadar, $r = y_2 - y_3$, $s = y_3 - y_2$, $l = y_2 - y_1$, ceea ce demonstrează afirmaţia directă. Reciproc, dacă $ra + sb + lc = 0$ şi $r + s + l = 0$, atunci punînd $a = x_1 + iy_1$, $b = x_2 + iy_2$, $c = x_3 + iy_3$, găsim că există trei numere r, s, l nu toate nule, care formează o soluţie a sistemului

$$rx_1 + sx_2 + lx_3 = 0,$$

$$ry_1 + sy_2 + ly_3 = 0,$$

$$r + s + l = 0.$$

Aceasta înseamnă că determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

este nul şi punctele A, B, C sînt coliniare.

Se poate raţiona şi astfel: din $ra + sb + lc = 0$, $r + s + l = 0$ deducem $ra + sb - (r + s)\, c = 0$, adică $c = \dfrac{ra + sb}{r + s}$, egalitate care arată că C se găseşte pe dreapta AB.

§ 7. Polinoame

7.1. Ecuaţiile de gradul întîi, al doilea etc. cu o singură necunoscută se scriu egalînd cu zero polinoame de gradul respectiv:

$$ax + b = 0,\ ax^2 + bx + c = 0 \ldots$$

Un sistem de ecuaţii liniare se scrie egalînd cu zero m polinoame de gradul întîi în n variabile $x_1, \ldots, x_n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n - b_1 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}a_n - b_m = 0.$$

Determinantul unei matrice A cu elemente *nedeterminate* este un polinom special în mai multe variabile; astfel

$$\det \begin{pmatrix} x & y \\ x & t \end{pmatrix} = xt - yz$$

este un polinom în x, y, z şi t.

La polinoamele

$$f = ax + b, \quad g = ax^2 + bx + c$$

deosebim *variabila* sau *nedeterminata* x şi coeficienţii a, b, c. La fel în polinomul

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b$$

deosebim variabilele (nedeterminatele) $x_1, \ldots, x_n$ şi coeficienţii $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$. Coeficienţii sînt numere sau, mai general, elemente ale unui inel; nedeterminatele nu sînt numere, ci doar elemente (ale unui semigrup) pentru care sînt definite puterile x^m, care satisfac regulile cunoscute de calcul cu puteri:

$$x^m x^n = x^{m+n}, \quad (x^m)^n = x^{mn}.$$

Înmulţirea diferitelor puteri ale variabilei cu coeficienţi şi noţiunea de polinom capătă înţelesuri mai precise dacă exploatăm mai mult observaţia că un polinom este dat atunci cînd cunoaştem *şirul coeficienţilor* săi.

Ne vom servi de această observaţie pentru a defini polinoamele într-o nedeterminată.

7.2. Fie A un inel comutativ (de exemplu, inelul Z al întregilor, corpul numerelor complexe etc.).

Să considerăm mulţimea S a şirurilor

$$a = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}, \quad a_i \in A,$$

în care numai un număr finit de termeni sînt diferiţi de zero.

Ca şi în analiză, spunem că şirul a este egal cu şirul $a' = \{a'_0, a'_1, a'_2, \ldots\}$ dacă şi numai dacă $a_i = a'_i$ pentru $i = 0, 1, 2, \ldots$

Fie $b = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ un alt şir din S; şirul $s = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}$ în care $s_i = a_i + b_i$, pentru $i = 0, 1, 2, \ldots$ are şi el numai un număr finit de termeni diferiţi de zero, adică este un şir din S; şirul s se numeşte *suma* şirurilor a şi b; se scrie $s = a + b$; se mai scrie

$$a + b = \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\}. \tag{7.1}$$

Teoremă. *Mulţimea S împreună cu operaţia de adunare definită prin formula (7.1) este un grup comutativ.*

Într-adevăr, adunarea este asociativă: dacă $c = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ este un al treilea şir din S, atunci

$(a + b) + c = \{(a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \ldots\} =$
$= \{a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \ldots\} = a + (b + c).$

Există un șir neutru pentru adunare, acela este șirul nul

$$\{0, 0, 0, \ldots\}$$

în care toate elementele sînt zero; se notează tot cu 0.

Pentru fiecare șir a există unul opus

$$-a = \{-a_0, \quad -a_1, \quad -a_2, \ldots\}.$$

E clar că $a + (-a) = 0$.

În sfîrșit, adunarea șirurilor este comutativă:

$$a + b = \{a_0 + b_0, \ a_1 + b_1, \ldots\} = \{b_0 + a_0, \ b_1 + a_1, \ldots\} = b + a.$$

Toate acestea arată că S este un grup comutativ.

În ceea ce privește înmulțirea în S, se dă o altă definiție decît cea din analiză și anume se numește produsul șirului a cu șirul b șirul $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ în care

$$p_0 = a_0 b_0, \ p_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ \ldots, \ p_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \ldots$$

Se notează acest produs cu ab; așadar

$$ab = (a_0 b_0, \ a_0 b_1 + a_1 b_0, \ a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots) \qquad (7.2)$$

Teoremă. *Mulțimea S împreună cu adunarea definită prin formula* (7.1) *și cu înmulțirea definită prin formula* (7.2) *este un inel.*

Într-adevăr, conform teoremei precedente, S este un grup comutativ față de adunare.

Pentru a demonstra că S este un inel, este destul să arătăm că înmulțirea este asociativă și distributivă față de adunare.

Înmulțirea este asociativă. Într-adevăr, fie $a = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$, $b = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$, $c = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ trei elemente din S. Fie $ab = u = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ cu $u_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0$.

Avem

$$(ab)c = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$$

cu

$$q_n = \sum_{i=0}^{n} u_i c_{n-i} = a_0 b_0 c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) c_0.$$

Să punem acum

$$bc = v = \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$$

cu $v_j = b_0 c_j + b_1 c_{j-1} + \ldots + b_j c_0$. Avem

$$a(bc) = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$$

cu

$$r_n = \sum_{i=0}^{n} a_i v_{n-1} = a_0(b_0c_n + b_1c_{n-1} + \ldots + b_nc_0) + \ldots +$$
$$+ a_{n-1}(b_0c_1 + b_1c_0) + a_nb_0c_0.$$

Este clar însă că grupînd în q_n mai întîi termenii cu a_0 în factor, apoi pe cei cu a_1, pe cei cu a_2,... şi sfîrşind cu termenul $a_nb_0c_0$, obţinem exact expresia lui r_n; prin urmare $q_n = r_n$. Aceasta arată că $(ab)c = a(bc)$.

Înmulţirea definită prin formula (7.2) *este comutativă*: $ab = ba$ pentru orice $a \in S$ şi $b \in S$ (inelul A este presupus comutativ; deci $a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 = b_0a_n + b_1a_{n-1} + \ldots + b_na_0$).

Înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Într-adevăr, să punem

$$(a + b)c = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\},\ ac = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\},\ bc = \{z_0, z_1, z_2, \ldots\}.$$

Avem

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)c_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (a_i c_{n-1} + b_i c_{n-i}) =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i c_{n-i} + \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i} = y_n + z_n,$$

de unde rezultă egalitatea $(a + b)c = ac + bc$, care arată că înmulţirea este distributivă la stînga faţă de adunare.

În baza comutativităţii înmulţirii, putem scrie

$$c(a + b) = (a + b)c = ac + bc = ca + cb,$$

egalitate care demonstrează şi distributivitatea la dreapta a înmulţirii faţă de adunare.

Astfel S este un inel comutativ; se numeşte *inelul polinoamelor* peste A. Elementele lui S, şirurile cu un număr finit de termeni nenuli, se numesc *polinoame*. Termenii unui şir din S se numesc (provizoriu) *termenii* sau *elementele* polinomului respectiv.

Să considerăm aplicaţia

$$i : A \to S$$

definită prin formula

$$i(\alpha) = \{\alpha, 0, 0, \ldots\},\ \alpha \in A.$$

Aplicația i este un omomorfism de inel. Într-adevăr,

$$i(\alpha + \beta) = \{\alpha + \beta, 0, 0, \ldots\} = \{\alpha, 0, 0, \ldots\} + \{\beta, 0, 0, \ldots = \\ = i(\alpha) + i(\beta)$$

și

$$i(\alpha\beta) = \{\alpha\beta, 0, 0, \ldots\} = \{\alpha, 0, 0, \ldots\}\{\beta, 0, 0, \ldots\} = i(\alpha)i(\beta)$$

pentru orice α și β din A.

Mai mult, nucleul acestui omomorfism este format numai din elementul 0 : $i(\alpha) = 0$, înseamnă că $\{\alpha, 0, \ldots\} = \{0, 0, \ldots\}$, adică $\alpha = 0$.

Prin urmare, aplicația i este un monomorfism ; se numește *monomorfismul natural* sau canonic sau *injecția (scufundarea) canonică* a lui A în S.

De obicei $i(A)$ se identifică cu A, scriindu-se α în loc de $i(\alpha)$. Prin această identificare rezultă definit produsul αp, dintre un element $\alpha \in A$ și orice polinom $p \in S$.

Anume, $\alpha p = i(\alpha)p = \{\alpha, 0, 0, \ldots\}\{p_0, p_1, p_2, \ldots\} = \{\alpha p_0, \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots\}$, după definiția (7.2) a produsului a două polinoame. Prin, urmare, avem

$$\alpha p = p\alpha = \{\alpha p_0, \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots\} \tag{7.3}$$

adică *înmulțirea unui polinom p cu un element α al inelului A se face înmulțind fiecare element al lui p cu α.*

Din proprietățile înmulțirii polinoamelor rezultă următoarele proprietăți ale înmulțirii cu elemente din A.

Dacă A are element unitate 1, atunci și S are element unitate și anume elementul unitate al lui S este $i(1) = \{1, 0, 0, \ldots\}$ care, în baza convenției de identificare, se notează tot cu 1 :

$$1p = p, \tag{7.4}$$

$$\beta(\alpha p) = (\beta\alpha)p, \ (\alpha, \beta \in A, \ p \in S), \tag{7.5}$$

$$\alpha(p + q) = \alpha p + \alpha p q, \ (q \in S), \tag{7.6}$$

$$(\alpha + \beta)p = \alpha p + \beta p. \tag{7.7}$$

Fiecare dintre proprietățile (7.4) — (7.7) se demonstrează ușor direct (ele au fost arătate în S). Astfel (7.5) se demonstrează în modul următor :

$$\beta(\alpha p) = \beta\{\alpha p_0, \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots\} = \{\beta\alpha p_0, \beta\alpha p_1, \beta\alpha p_2, \ldots\} = \\ = (\beta\alpha)\{p_0, p_1, p_2, \ldots\} = (\beta\alpha)p.$$

La fel se demonstrează şi (7.6) :

$$\alpha(p+q) = \alpha\{p_0+q_0, p_1+q_1, p_2+q_2, \ldots\} =$$
$$= \{\alpha(p_0+q_0), \alpha(p_1+q_1), \alpha(p_2+q_2), \ldots\} =$$
$$= \{\alpha p_0 + \alpha q_0, \alpha p_1 + \alpha q_1, \alpha p_2 + \alpha q_2, \ldots\} =$$
$$= \{\alpha p_0, \alpha p_1, \alpha p_2, \ldots\} + \{\alpha q_0, \alpha q_1\, \alpha q_2, \ldots\} =$$
$$= \alpha\{p_0, p_1, p_2, \ldots\} + \alpha\{q_0, q_1, q_2, \ldots\} = \alpha p + \alpha q.$$

Din proprietatea (7.6) rezultă

$$\alpha p = \alpha((p-q)+q) = \alpha(p-q) + \alpha q.$$

Din această relaţie deducem

$$\alpha p - \alpha q = \alpha(p-q),$$

adică *înmulţirea cu elementele din A este distributivă faţă de scăderea polinoamelor.*

Din ultima relaţie deducem

$$s \cdot 0 = s\,(p-p) = sp - sp = 0.$$

Această relaţie se poate deduce şi direct din definiţia (7.3) a înmulţirii cu elemente din A, punînd acolo $p = 0$. De asemenea din aceeaşi formulă (7.3), punînd $\alpha = 0$, deducem $0 \cdot p = 0$, pentru orice polinom p.

Tot din formula (7.3) se deduce

$$(-1)\,p = \{-p_0, -p_1, -p_2, \ldots\} = -p.$$

Să considerăm polinomul

$$X = \{0,\ 1,\ 0,\ \ldots\}$$

cu toate elementele egale cu zero, afară de al doilea care este egal cu 1. Conform formulei (7.2) de înmulţire, avem

$$X^2 = \{0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots\},$$

un polinom cu toate elementele nule, afară de al treilea care este egal cu $+1$. În continuare, vom avea

$$X^3 = X^2 \cdot X = \{0, 0, 0, 1, 0, \ldots\}, \ldots, X^n = \{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$$

(1 precedat de n zerouri şi urmat de zerouri).

Observăm acum că potrivit formulei (7.1) de adunare a polinoamelor și formulei (7.3) de înmulțire cu scalari, putem scrie

$$p = \{p_0, p_1, p_2, \ldots\} = p_0\{1, 0, 0, \ldots\} + p_1\{0, 1, 0, \ldots\} +$$
$$+ p_2\{0, 0, 1, 0, \ldots\} + \ldots + p_n\{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\},$$

dacă p_n este ultimul element nenul în șirul $p_0, p_1, p_2, \ldots$

Înlocuind acum polinoamele $\{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{m}, 1, 0, \ldots\}$ cu X^m, $m = 1, 2, \ldots$, obținem notația definitivă pentru polinoame

$$p = p_0 \cdot 1 + p_1 X + p_2 X^2 + \ldots + p_n X^n.$$

Termenul $p_0 \cdot 1$ se scrie mai simplu p_0, astfel încît orice polinom din S se poate scrie sub forma

$$p = p_0 + p_1 X + p_2 X^2 + \ldots + p_n X^n. \tag{7.8}$$

Polinomul X se numește *nedeterminata* sau *variabila*. Din considerațiile de mai înainte rezultă că X nu este de loc nedeterminată, ci este un polinom particular. Denumirea de variabilă este legată de funcția polinomială, pe care o vom discuta mai tîrziu.

Elementele $p_0, p_1, \ldots, p_n$ se numesc coeficienții polinomului; reprezentarea (7.8) se numește *dezvoltarea polinomului* p după puterile lui X, iar polinoamele $p_k X^k$ se numesc *termenii dezvoltării polinomului* p și anume p_0 este termenul de gradul 0, $p_1 X$ termenul de gradul 1, ..., $p_n X^n$ termenul de gradul cel mai mare (*gradul polinomului*); p se numește *coeficientul dominant* al polinomului. Gradul polinomului p se mai notează și cu simbolul gr p; prin urmare, $n = \text{gr } p$.

Cu ajutorul acestei reprezentări operațiile cu polinoame se scriu sub forma cunoscută: dacă

$$q = q_0 + q_1 X + \ldots + q_m X^m,$$

atunci

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1 X) + \ldots + (p_m + q_m) X^m +$$
$$+ p_{m+1} X^{m+1} + \ldots + p_n X^n, \quad (m \leqslant n), \tag{7.1'}$$

$$pq = p_0 q_0 + (p_0 q_1 + p_1 q_0) X + \ldots + p_n q_m X^{m+n}. \tag{7.2'}$$

Dacă $\alpha \in A$,

$$\alpha p = \alpha p_0 + \alpha p_1 X + \ldots + \alpha p_n X^n. \tag{7.3'}$$

Dacă A nu are divizori ai lui zero, din formula (7.2′) rezultă proprietatea importantă a gradului :

$$\operatorname{gr}(pq) = \operatorname{gr} p + \operatorname{gr} q ,$$

$$\operatorname{gr}(p + q) \leqslant \max(\operatorname{gr} p, \operatorname{gr} q),$$

pentru că prin adunare termenii de grad maxim pot cel mult să dispară ; în nici un caz nu pot să apară termeni de grad mai mare ca max (gr p, gr q).

Exemplu. Fie A inelul Z al intregilor şi $p = X + X^3$, $q = 1 + X^2 - X^3$, $\operatorname{gr}(p + q) = \operatorname{gr}(1 + X + X^2) = 2 < \operatorname{gr} p = \operatorname{gr} q$.

$$\text{Fie } r = 1 + X^2 - X^5 ; \operatorname{gr} p \cdot r = \operatorname{gr}(X + X^3)(1 + X^2 - X^5) =$$

$$= \operatorname{gr}(X + 2X^3 + X^5 - X^6 - X^8) = 3 + 5 = 8.$$

Imaginea lui A prin monomorfismul canonic se numeşte *inelul polinoamelor de grad zero*.

În legătură cu reprezentarea (7.8) a polinoamelor, inelul S se mai notează şi cu simbolul $A[X]$.

7. 3. Exerciţii

1. Să se facă înmulţirile

$$(a + bX + cX^2)(p + qX + rX^2).$$

2. Să se determine l, m, n astfel încît să putem scrie

$$l(X - 1)(X - 2) + m(X - 1)(X - 3) +$$

$$+ n(X - 2)(X - 3) = 5X^2 + 19X + 18.$$

Indicaţie. Se compară coeficienţii şi se rezolvă sistemul de ecuaţii liniare rezultat.

3. Orice număr întreg scris în sistemul zecimal este un polinom în care variabila se înlocuieşte cu 10, adică cu polinomul

$$\{0, 10, 0, \ldots\},$$

iar coeficienţii sînt numere întregi cuprinse între 0 şi 9, inclusiv zero şi 9. Să se calculeze produsul 2536×47253, ţinînd seama de regula de înmulţire a polinoamelor.

4. Să se calculeze coeficientul lui X^4 din produsul

$$p = (1 + X + X^2)(1 - X)^3$$

şi din produsul

$$q = (1 + X + X^2)(1 - X)^{13}.$$

5. Să se calculeze coeficientul lui X^5 din

$$(1 + 2X + 4X^2 + 8X^3)^5.$$

Indicație. Se poate scrie sub forma $[(1 + 2X)(1 + 4X^2)]^5$; se găsește 39680.

6. Să se calculeze coeficientul lui X^p, $p \leqslant n$ în produsul

$$[(p - 2)X^2 + nX - p](X + 1)^n.$$

Indicație. Dezvoltînd pe $(X + 1)^n$ după formula binomului, găsim:

$$(p - 2)C_n^{p-2} + nC_n^{p-1} - pC_n^p = nC_n^{p-2}.$$

7. Să se calculeze coeficienții lui X^{n-1} și lui X^{n-2} în produsul

$$(X + 1)(X + 2) \ldots (X + n).$$

R. Coeficientul lui X^{n-1} este $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$,

Coeficientul lui X^{n-2} este $c = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot n + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1) \cdot n$.

Pentru a-l calcula se observă egalitatea $\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 2c$.

$\sum_{i=1}^{n} i^2$ se deduce din relațiile

$$2^3 = 1 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1,$$

care adunate dau

$$(n + 1)^3 = (n + 1) + 3\,\Sigma i^2 + 3\,\Sigma i.$$

8. Să se calculeze coeficientul lui X^{n-1} și coeficientul lui X^{n-2} în produsul

$$(X + a)(X + a^2) \ldots (X + a^n).$$

R. Coeficientul lui X^{n-1} este $A = \sum_{m=1}^{n} a^m = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$.

Coeficientul lui X^{n-2} este B din relația

$$\left(\sum_{m=1}^{n} a^m\right)^2 = \sum_{m=1}^{n} a^{2m} + 2B.$$

9. Să se verifice identitatea

$$(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \ldots (1 + X^{2^n}) = 1 + X + X^2 + \\ + \ldots + X^{n^2+n+1}.$$

Indicație. Inducție completă asupra lui n.

7.4. Polinoame în mai multe variabile

7.4.1. Fiecare polinom $p = p_0 + p_1 X + \ldots + p_n X^n$ poate fi interpretat ca o aplicație a mulțimii $\{X^0, X^1, X^2, \ldots\}$ în corpul coeficienților: $p(X^0) = p_0, p(X^1) = p_1, \ldots, p(X^n) = p_n$. Din acest punct de vedere inelul $K[X]$ poate fi interpretat astfel:

$K[X]$ este spațiul vectorial al funcțiilor p, definite pe semigrupul $\{X^0, X^1, X^2, \ldots\}$ care au proprietatea că sînt nule peste tot în afară de o parte finită a sa, parte care depinde de p și este cuprinsă în mulțimea $\{X^0, X^1, \ldots, X^n\}$, dacă n este gradul polinomului p.

Astfel privită, noțiunea de polinom se poate generaliza ușor. Să considerăm în acest scop în loc de o singură variabilă o mulțime X oarecare de variabile X_α.

Pentru a fixa ideile vom considera o mulțime de trei variabile $X = \{X_1, X_2, X_3\}$. Aplicațiile lui X în mulțimea $\{0\} \cup N$ se numesc *monoame* în X_1, X_2, X_3; un monom asociază lui X_1 un întreg $m_1 \geqslant 0$, lui X_2 un întreg $m_2 \geqslant 0$ și lui X_3 un întreg $m_3 \geqslant 0$; monomul însuși se notează cu $X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$.

Pe mulțimea S a monoamelor lui X se poate defini o structură de semigrup cu legea de compunere

$$(X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3})(X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3}) = X_1^{m_1+n_1} X_2^{m_2+n_2} X_3^{m_3+n_3}. \qquad (7.9)$$

Se verifică fără greutate că această lege de compunere este asociativă și are element neutru $X_1^0 X_2^0 X_3^0$.

Să considerăm acum aplicațiile semigrupului S în corpul K și anume acele aplicații care sînt nule peste tot în afara unei părți finite a lui S.

Notînd cu a o astfel de aplicație, vom pune

$$a(X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}) = a_{m_1 m_2 m_3}.$$

Vom nota cu $K[X_1, X_2, X_3]$ sau cu simbolul $K[X]$ mulțimea acestor aplicații.

În $K[X]$ se poate defini o structură de inel punînd

$$a + b = s, \qquad (7.10)$$

unde

$$a_{m_1 m_2 m_3} + b_{m_1 m_2 m_3} = s_{m_1 m_2 m_3}$$

şi

$$a \cdot b = p, \tag{7.11}$$

unde

$$p_{n_1 n_2 n_3} = \sum_{\substack{0 \leqslant i_1 \leqslant n_1 \\ 0 \leqslant i_2 \leqslant n_2 \\ 0 \leqslant i_3 \leqslant n_3}} a_{i_1 i_2 i_3} b_{n_1 - i_1,\, n_2 - i_2,\, n_3 - i_3}.$$

Se verifică întocmai ca şi în cazul polinoamelor într-o singură variabilă că mulţimea $K[X]$, împreună cu adunarea şi înmulţirea definită prin formulele (7.10) şi (7.11), este un inel care se numeşte *inelul polinoamelor* în X_1, X_2, X_3 cu coeficienţii în K. De asemenea se verifică, tot ca şi în cazul polinoamelor într-o singură variabilă, că aplicaţia

$$i : K \to K[X],$$

definită prin formula

$$i(\alpha) = \alpha X_1^0 X_2^0 X_3^0,$$

este un monomorfism. Imaginea lui K se identifică prin acest monomorfism cu K şi, în baza formulei (7.11) de înmulţire şi a acestei identificări, rezultă definită înmulţirea elementelor din $K[X]$ cu elemente din K. Prin aceasta, $K[X]$ devine un spaţiu vectorial peste K.

Să considerăm polinomul $f_{m_1 m_2 m_3}$ astfel încît

$$f_{m_1 m_2 m_3}(X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}) = 1$$

şi

$$f_{m_1 m_2 m_2}(X_1^{n_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3}) = 0$$

dacă $n_1 \neq m_1$, sau $n_2 \neq m_2$, sau $n_3 \neq m_3$. Atunci p fiind un polinom oarecare şi punînd $p_{m_1 m_2 m_3} = p(X_1^{m_1} X_2^{n_2} X_3^{n_3})$, putem scrie

$$p = \Sigma\, p_{m_1 m_2 m_3} f_{m_1 m_2 m_3}.$$

În sfîrşit, identificînd polinomul $f_{m_1 m_2 m_3}$ diferit de zero, cu singurul monom $X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$, putem scrie, ca şi în cazul polinoamelor într-o singură variabilă,

$$p = \Sigma\, p_{m_1 m_2 m_3} X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}, \tag{7.12}$$

suma fiind finită. Aceasta este notaţia uzuală în inelul polinoamelor de mai multe variabile.

Exemple. $1 + X + Y$, $X + 2Y + 5Z$, $X^2 + 2XY + Y^2$, $X^3 + 3X^2Y + 3XY^2 + Y^3$, $X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY$, $XT - YZ$ sînt polinoame în două, în trei iar ultimul în patru variabile.

Din definiţia polinoamelor ca aplicaţii ale lui S în K şi din construcţia inelului $K[X]$ rezultă că două polinoame p şi q sînt egale, dacă şi numai dacă au aceleaşi valori pentru fiecare monom $X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$, adică dacă şi numai dacă $p_{m_1 m_2 m_3} = q_{m_1 m_2 m_3}$ pentru orice m_1, m_2 şi m_3.

În expresia (7.12) a unui polinom p deosebim termenii polinomului $p_{m_1 m_2 m_3} X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$. Fiecare termen este produsul dintre coeficientul acelui termen şi monomul $X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$. Doi termeni care se deosebesc numai prin coeficienţi se numesc *termeni asemenea.*

În expresia unui polinom putem face ca fiecare monom să apară o singură dată, cu un singur coeficient; această operaţie poartă numele de *reducerea* termenilor asemenea.

Formula (7.11) de înmulţire a polinoamelor se traduce în cuvinte spunînd că două polinoame se înmulţesc înmulţind fiecare termen al unuia cu toţi termenii celuilalt [înmulţind coeficienţii între ei şi monoamele între ele după formula (7.9)], făcînd suma produselor obţinute şi reducînd termenii asemenea.

Fie $X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$ un monom; se numeşte *gradul* său întregul $m_1 + m_2 + m_3$, care este nenegativ.

Fie $p = \sum p_{m_1 m_2 m_3} X_1^{m_1} X_2^{m_2} X_3^{m_3}$ un polinom; între diferitele monoame care figurează cu coeficientul nenul în expresia lui p există cel puţin unul de grad maxim g; g se numeşte *gradul polinomului* p.

Dacă gradul lui p este zero, atunci p se reduce la termenul $p_{000} X_1^0 X_2^0 X_3^0$ care se scrie mai simplu p_{000}, identificîndu-se monomul $X_1^0 X_2^0 X_3^0$ cu 1.

Orice polinom în trei variabile poate fi privit ca un polinom în X_3 cu coeficienţii în inelul $K[X_1, X_2]$. În legătură cu aceasta el are un grad în X_3; la fel are un grad în X_2 şi un grad în X_1; aceste grade pot să difere între ele şi să fie diferite şi de gradul polinomului definit mai sus, care se numeşte gradul total al polinomului. Astfel, polinomul

$$X_1 X_2^3 + X_3^2$$

este de gradul întîi în X_1, de gradul al treilea în X_2, de gradul al doilea în X_3 şi are gradul total egal cu patru.

7.4.1. Un polinom în trei variabile se zice *omogen* de gradul g, sau *formă* de gradul g, dacă toate monoamele care apar cu coeficient diferit de zero în expresia sa au acelaşi grad g.

Exemplu. $X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 3X_2 X_3$ este o formă de gradul al doilea.

Să presupunem că o matrice pătrată A de ordinul n are elementele X_{ij} nedeterminate; det A este un polinom omogen de grad total n; ca polinom în elementele unei linii, det A este omogen de gradul întîi.

Polinoamele omogene de gradul m din $K[X]$ formează un spaţiu vectorial peste K. Într-adevăr, suma a două polinoame omogene de gradul m este un polinom omogen de acelaşi grad şi înmulţind un polinom omogen de gradul m cu un element din K, obţinem tot un polinom omogen de gradul m.

Produsul a două monoame de grad total m şi m' este un monom de grad total $m + m'$; prin urmare, produsul unui polinom omogen de gradul m cu un polinom omogen de gradul m' este un polinom omogen de gradul $m + m'$.

Orice polinom din $K[X]$ se poate scrie în mod unic sub forma unei sume de polinoame omogene de diferite grade. Aceasta pentru că, în baza comutativităţii adunării în $K[X]$, putem grupa termenii polinomului pe grade; termenul de gradul zero, la care se adună suma termenilor de gradul întîi, apoi suma termenilor de gradul al doilea etc.

Unicitatea rezultă din însăşi definiţia polinomului, în particular a polinomului nul.

7.4.2. Construcţia inelului de polinoame în mai multe variabile se poate face şi prin recurenţă, plecînd de la construcţia inelului $A[X_1]$ de polinoame într-o variabilă X_1 cu coeficienţii într-un inel comutativ A; se construieşte apoi inelul $B[X_2]$, unde $B = A[X_1]$.

Se poate arăta că inelul de polinoame $K[X_1, X_2]$ construit mai înainte şi inelul $K[X_1][X_2]$ de polinoame în X_2 cu coeficienţii în $K[X_1]$ sînt izomorfe.

Pentru a demonstra aceasta, este destul să observăm că fiecare polinom $f \in K[X_1, X_2]$ se poate scrie ca polinom în X_2 cu coeficienţi în $K[X_1]$:

$$f = g_0(X_1) + g_1(X_1)\,X_2 + \ldots + g_n(X_2)\,X_2^n.$$

Pus sub această formă, f apare ca un element al inelului $K[X_1][X_2]$.

Asemenea reprezentare a polinomului din $K[X_1, X_2]$ comută cu operaţiile de inel, deci cele două inele se identifică, adică sînt izomorfe.

Observăm că cele două inele se identifică prin scrierea uzuală a polinoamelor ca sume de monoame; altfel, ele au construcţii diferite.

Din consideraţiile precedente rezultă că inelele de polinoame $K[X_1][X_2]$ şi $K[X_2][X_1]$ coincid, pentru că amîndouă sînt identice

cu inelul $K[X_1, X_2]$. Acum se poate trece la trei variabile: $K[X_1, X_2, X_3]$ se identifică cu inelul $K[X_1, X_2][X_3]$ ş.a.m.d.

7.4.3. *Polinoame simetrice.* Între polinoamele în n variabile $X_1, \ldots, X_n$ merită în special să fie menţionate polinoamele simetrice.

Definiţie. Orice polinom din $K[X_1, \ldots, X_n]$, care rămîne neschimbat, cînd asupra variabilelor executăm o permutare oarecare, se numeşte polinom simetric.

Exemple

$$s_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

$$s_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \ldots + X_{n-1} X_n,$$

$$s_3 = X_1 X_2 X_3 + X_1 X_2 X_4 + \ldots + X_{n-2} X_{n-1} X_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s_n = X_1 X_2 \ldots X_n$$

sînt polinoame simetrice, omogene de gradul 1, 2, ..., n respectiv.

De asemenea $X_1^4 + X_2^4 + X_3^4$,
$X_1^2 X_2 + X_1^2 X_3 + X_1 X_2^2 + X_1 X_3^2 + X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2$ sînt polinoame simetrice în X_1, X_2, X_3.

7.4.4. *Exerciţii*

1. Să se demonstreze identităţile

$$(x - y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4 = 2[(x - y)^2 (y - z)^2 + (y - z)^2 (z - x)^2 + (z - x)^2 (x - y)^2] = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)^2.$$

2. Să se verifice identitatea

$$(X + Y + Z)^3 - (Y + Z - X)^3 - (Z + X - Y)^3 - (X + Y - Z)^3 = 24XYZ.$$

§ 8. Relaţia de divizibilitate în $K[X]$

8.1. În cele ce urmează, K este un corp (corpul numerelor complexe, corpul numerelor reale, corpul numerelor raţionale etc.). Vom nota cu $A, B, C, \ldots$ polinoamele din $K[X]$.

Teoremă. *Inelul $K[X]$ nu are divizori ai lui zero (este integru).*

Aceasta rezultă din definiţia (7.2) a înmulţirii polinoamelor; coeficientul dominant al produsului este produsul coeficienţilor

dominanți ai factorilor; aceștia fiind diferiți de zero, produsul lor nu poate fi zero, căci într-un corp nu există divizori ai lui zero.

Prin urmare, dacă A și B sînt polinoame din $K[X]$, atunci

$$\text{gr}\,(AB) = \text{gr}\,A + \text{gr}\,B.$$

Corolar. *Dacă A, B, C sînt polinoame în $K[X]$, din relația $AC = BC$ și $C \neq 0$, rezultă $A = B$.* Într-adevăr, avem $(A - B)C = 0$; prin urmare, unul dintre factori trebuie să fie nul. Cum $C \neq 0$, rezultă $A - B = 0$, adică $A = B$.

Faptul central în teoria divizibilității numerelor întregi este exprimat de următoarea

Teoremă. *Orice număr întreg admite o descompunere în factori primi pozitivi, unică, în afară de ordinea factorilor.*

În orice inel de polinoame $K[X]$ este valabilă o teoremă analogă. Pentru a o stabili, vom reconstitui în $K[X]$ teoria divizibilității.

Definiție. Fie A, B polinoame din $K[X]$; spunem că A este multiplu al lui B, dacă există un polinom $C \in K[X]$ astfel încît să putem scrie $A = BC$.

În acest caz se mai poate spune că B divide pe A sau că B este un divizor (factor) al lui A.

Dacă vrem să exprimăm numai faptul că B divide pe A, fără a menționa polinomul C, scriem $B \mid A$ (se citește: B divide pe A).

Corolarul 1. *Relațiile $C \mid B$, $B \mid A$ implică $C \mid A$ (tranzitivitatea relației de divizibilitate).* Într-adevăr, dacă există C' astfel încît să putem scrie $B = CC'$ și dacă există B' astfel încît să putem scrie $A = BB'$, atunci avem $A = C(C'B')$; prin urmare $C \mid A$.

Corolarul 2. *Relațiile $A \mid B$, $A \mid C$ implică $A \mid (BP + CQ)$, oricare ar fi polinoamele P și Q din $K[X]$.*

Într-adevăr dacă $B = AA_1$ și $C = AA_2$ cu A_1, $A_2 \in K[X]$, atunci $BP + CQ = AA_1P + AA_2Q = A(A_1P + A_2Q)$, adică $A \mid (BP + CQ)$.

Definiție. Elementele lui $K[X]$ care divid pe 1 se numesc elemente inversabile.

Prin urmare, A este inversabil dacă există $B \in K[X]$ astfel încît să putem scrie $AB = 1$. Din această relație rezultă $\text{gr}\,A + \text{gr}\,B = \text{gr}\,1$.

Cum $\text{gr}\,1 = 0$, și gradul oricărui polinom este un număr pozitiv sau zero, rezultă că singurele elemente inversabile din $A[X]$ sînt polinoamele de grad zero, nenule, adică elementele diferite de zero din K. Înseamnă că elementele inversabile din $K[X]$ formează un grup multiplicativ, anume K^* (grupul elementelor nenule din K).

Să presupunem că A și B sînt două polinoame astfel încît există un element $\alpha \in K^*$ care satisface egalitatea $A = \alpha B$; rezultă că putem scrie și $B = \frac{1}{\alpha} A$, iar $\frac{1}{\alpha} \in K^*$.

Definiție. Două polinoame care se deduc unul din altul prin înmulțire cu un element inversabil se numesc *polinoame asociate.*

Astfel $X^2 + \frac{1}{2}$ și $2X^2 + 1$ sînt polinoame asociate în $Q[X]$, Q fiind corpul numerelor raționale.

Teoremă. *Dacă A și B sînt polinoame asociate, $A \mid B$ și $B \mid A$* și reciproc : *dacă $A \mid B$* și $B \mid A$, *atunci A și B sînt asociate.*

Într-adevăr, dacă A și B sînt asociate, există $\alpha \in K$ astfel ca să putem scrie $A = \alpha B$, deci $B \mid A$; dar putem scrie și $\alpha^{-1} A = B$, deci $A \mid B$.

Reciproc, dacă $A \mid B$ și $B \mid A$, înseamnă că există C și D în $K[X]$, astfel încît să putem scrie $B = CA$ și $A = DB$. Rezultă că avem $A = DCA$; considerînd gradele în ambele părți ale acestei relații, avem

$$\text{gr } A = \text{gr } D + \text{gr } C + \text{gr } A,$$

de unde deducem gr D + gr $C = 0$. Din această relație și din gr $D \geqslant 0$ și gr $C \geqslant 0$, rezultă gr D = gr $C = 0$, adică C și D sînt elemente inversabile din $K[X]$; înseamnă că A și B sînt polinoame asociate.

Deci, orice polinom este divizibil prin elementele inversabile și prin polinoamele asociate cu el.

Definiție. Orice divizor al polinomului A, care nu este nici inversabil și nici asociat cu A, se numește *divizor propriu* al lui A.

Rezultă că dacă B este divizor propriu al lui A, $1 \leqslant \text{gr } B < \text{gr } A$.

Într-adevăr, faptul că $B \mid A$, înseamnă că există un polinom C astfel încît să putem scrie $A = BC$; prin urmare, gr A = gr B + + gr C. Dar gr $C \neq 0$, deoarece B nu este asociat cu A. Aceasta înseamnă că gr $C > 0$; deci gr $B <$ gr A. Deoarece B nu este unitate, gr $B \geqslant 1$, de unde rezultă afirmația.

Definiție. Polinomul A se numește *ireductibil* dacă nu admite divizori proprii.

Exemple. 1. Polinoamele de gradul întîi sînt ireductibile în $K[X]$ pentru orice corp K.

Fie $a + bX$ un astfel de polinom și să presupunem că avem $a +$ $+ bX = AB$. Comparînd gradele, obținem $1 =$ gr $A +$ gr B. Cum gr $A \geqslant 0$ și gr $B \geqslant 0$, rezultă gr $A = 0$, gr $B = 1$ sau gr $A = 1$,

gr $B = 0$. În primul caz A este inversabil și B asociat cu $a + bX$; în al doilea B este inversabil și A asociat cu $a + bX$.

2. Polinomul $X^2 + 3$ este ireductibil în inelul polinoamelor cu coeficienții raționali. Într-adevăr, din egalitatea $(aX + b)(cX + d)$ rezultă $ac = 1$, $ad + bc = 0$, $bd = 3$. Din prima și ultima ecuație rezultă că $ab \neq 0$. Împărțind cu ab ecuația a doua, obținem $d/b = -c/a = u$; prin urmare $-a^2u = 1$, $b^2u = 3$, de unde $-b^2/a^2 = +3$, ceea ce este absurd, 3 nefiind un număr negativ. Așadar, polinomul $X^2 + 3$ nu are divizori de gradul întîi; înseamnă că singurii lui divizori în $Q[X]$ sînt polinoame de gradul al doilea (deci asociate) și cele de gradul zero (deci inversabile). În general, orice divizor al unui polinom A de același grad cu A este asociat cu A.

Teoremă. *Orice polinom din $K[X]$ se poate scrie ca un produs de polinoame ireductibile în $K[X]$ în număr finit.*

Demonstrația acestei teoreme se face prin inducție completă asupra gradului polinoamelor.

Teorema este adevărată pentru polinoamele de gradul întîi, care sînt ireductibile (în acest caz numărul factorilor ireductibili este egal cu unu). Să presupunem că este adevărată pentru polinoamele de grad mai mic decît n și fie P un polinom de gradul n. Sau P este ireductibil și în acest caz rezultă că teorema este adevărată (numărul factorilor primi este egal cu unu) sau $P = AB$, A și B nefiind nici inversabile nici asociate cu P.

Dar în baza ipotezei de inducție despre polinoamele A și B putem afirma că sînt ireductibile sau sînt produse de polinoame ireductibile pentru că gr $A < n$, gr $B < n$.

Divizorii ireductibili ai lui A împreună cu divizorii ireductibili ai lui B formează mulțimea finită a divizorilor ireductibili pentru P.

Exemplu

$$4X^7 - 4X^6 - 4X^5 + 4X^4 + X^3 - X^2 - X + 1 =$$
$$= (X + 1)(X - 1)^2 (2X^2 + 2X + 1)(2X^2 - 2X + 1) =$$
$$= 4(X + 1)(X - 1)^2 \left(X^2 + X - \frac{1}{2}\right)\left(X^2 - X + \frac{1}{2}\right).$$

8.2. Împărțirea cu rest în $K[X]$

8.2.1. În inelul polinoamelor cu coeficienți într-un corp există o formulă a împărțirii cu rest analogă formulei care leagă între ele două numere întregi m și n de cîtul și restul împărțirii unuia din ele prin celălalt $m = nq + r$, cu $0 \leqslant r < n$, anume, are loc următoarea

Teoremă. *Să presupunem că A și B sînt polinoame din $K[X]$ și $B \neq 0$; atunci există un polinom R, de grad mai mic decît gradul lui B și un polinom C, ambele din $K[X]$, unic determinate, astfel încît să putem scrie*

$$A = BC + R. \tag{8.1}$$

Demonstrație. Dacă gr $A <$ gr B, atunci se pune $C = 0$, $R = A$.

Dacă gr $A \geqslant$ gr B, atunci fie $a_m X^m$ termenul de grad maxim al lui A și $b_n X^n$ termenul de grad maxim al lui B; să punem

$$C_1 = \frac{a_m}{b_n} X^{m-n} \text{ cu } m \geqslant n \text{ și să considerăm diferența } R_1 = A - BC_1.$$

Avem gr $R_1 <$ gr A, inegalitatea fiind strictă. Această inegalitate rezultă din faptul că scăzînd BC_1 din A, termenul de grad maxim $a_m X^m$ dispare.

Dacă gr $R_1 <$ gr B, punem $C = C_1$, $R = R_1$.

Dacă gr $R_1 \geqslant$ gr B, considerăm termenul de grad maxim al lui R_1: fie acela $a_{m_1} X^{m_1}$; punem $C_2 = \frac{a'_{m_1}}{b_n} X^{m_1-n}$ și facem diferența

$$R_2 = R_1 - BC_2 = A - B(C_1 + C_2).$$

Dacă gr $R_2 <$ gr B, punem $C = C_1 + C_2$ și $R = R_2$; dacă gr $R_2 \geqslant$ gr B, repetăm procedeul.

În felul acesta se obține un șir de polinoame

$$A,\ R_1,\ R_2,\ \ldots \tag{8.2}$$

astfel încît

$$\text{gr } A > \text{gr } R_1 > \text{gr } R_2 > \ldots$$

Șirul (7.2) se oprește la primul polinom R_s de grad strict mai mic decît gr B. Deci șirul va avea cel mult gr A — gr $B + 1$ termeni.

Termenii șirului satisfac relațiile

$$R_1 = A - BC_1,$$

$$R_2 = R_1 - BC_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$R_s = R_{s-1} - BC_s.$$

Punem $R_s = R$ și adunăm parte cu parte aceste relații; obținem

$$R = A - B(C_1 + C_2 + \cdots + C_s).$$

Punem de asemenea $C_1 + C_2 + \ldots + C_s = C$. Prin urmare, $R = A - BC$.

Astfel existența polinoamelor R și C este demonstrată.

Exemplu. Fie $A = 5 - X + 3X^2 + 2X^4$, $B = -1 + 2X^2$, gr $A >$ gr B; să considerăm polinomul

$$C_1 = \frac{2X^4}{2X^2} = X^2.$$

Notînd $R_1 = A - BC_1 = 4X^2 - X + 5$, avem gr $R_1 =$ gr B; prin urmare, considerăm polinomul

$$C_2 = \frac{4X^2}{2X^2} = 2;$$

$R_2 = R_1 - BC_2 = A - R(C_1 + C_2) = -X + 7$ este de gradul întîi (strict mai mic decît 2, gr B). Astfel în acest caz

$$R = -X + 7, \quad C = C_1 + C_2 = X^2 + 2.$$

Calculele se dispun de obicei după următoarea schemă:

$$\begin{array}{rl|l} A = & 2X^4 + 3X^2 - X + 5 & 2X^2 - 1 \\ -BC_1 = & -2X^4 + X^2 & \hline X^2 + 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} R_1 = & 4X^2 - X + 5 \\ -BC_2 = & -4X^2 \quad\quad + 2 \\ R = R_2 = & \quad\quad -X + 7 \end{array}$$

Prin urmare,

$$2X^4 + 3X^2 - X + 5 = (2X^2 - 1)(X^2 + 2) - X + 7.$$

Determinarea polinoamelor R și C se numește ca și la numere întregi *împărțirea cu rest* sau *împărțirea euclidiană*, pentru a o distinge de operația de împărțire (înmulțirea cu inversul) într-un corp.

Polinoamele A, B, C, R poartă denumirile știute: *deîmpărțit*, respectiv *împărțitor* *cît* și *rest*. *Unicitatea* restului și a cîtului se demonstrează ușor:

Fie R' și C' alte două polinoame care verifică egalitatea împărțirii cu rest:

$$R' = A - BC' \quad , \quad 0 \leqslant \text{gr } R' < \text{gr } B.$$

Prin scădere deducem

$$R' - R = B(C - C').$$

Considerînd în această relație gradele, avem

$$\text{gr } (R' - R) = \text{gr } B + \text{gr } (C - C').$$

Dar dacă $R' - R \neq 0$, gr $(R' - R) \leqslant$ max (gr R', gr R) $<$ gr B, ultima inegalitate fiind strictă și gr $(C - C') \geqslant 0$.

Astfel, dacă $R' - R \neq 0$, deducem

$$\text{gr } B > \text{gr } (R' - R) = \text{gr } B + \text{gr } (C - C') \geqslant \text{gr } B,$$

primă inegalitate fiind strictă, deci

$$\text{gr } B \neq \text{gr } B,$$

ceea ce este absurd.

Rezultă că $R' - R = 0$, adică $R' = R$ și $B(C - C') = 0$. Această ultimă relație cere $C = C'$, căci $B \neq 0$, conform ipotezei din enunț. Astfel unicitatea cîtului și a restului împărțirii lui A prin B este demonstrată.

8.2.2. Un alt procedeu pentru determinarea cîtului și a restului împărțirii unui polinom A prin altul B se bazează pe observația că $\text{gr } C = \text{gr } A - \text{gr } B$, $\text{gr } R < \text{gr } B$; prin urmare, necunoscutele problemei, coeficienții polinoamelor R și C sînt în număr finit; mai mult acești coeficienți sînt legați de coeficienții polinoamelor A și B printr-un sistem de ecuații liniare, care se obțin comparînd coeficienții lui X^0, X, X^2, ... din stînga și din dreapta semnului de egalitate din (7.1).

Exemplu. Fie A și B polinoamele din exemplul precedent. Rezultă $\text{gr } C = 2$, $\text{gr } R = 2$. Prin urmare, vom avea de determinat coeficienții polinoamelor $C = a + bX + cX^2$, $R = d + eX$, astfel încît să aibă loc egalitatea $5 - X + 3X^2 + 2X^4 = (-1 + 2X^2)(a + bX + cX^2) + d + eX$. Aceasta ne conduce la sistemul

$$\begin{aligned} 5 &= -a + d, \\ -1 &= -b + e, \\ 3 &= 2a - c, \\ 0 &= 2b, \\ 2 &= 2c, \end{aligned}$$

din care rezultă $c = 1$, $b = 0$, $a = 2$, $d = 7$, $e = -1$.

Metoda aceasta se numește *metoda coeficienților nedeterminați.*

8.3. Cel mai mare divizor comun a două polinoame

8.3.1. Demonstrația unicității descompunerii unui polinom în factori ireductibili se sprijină pe o proprietate importantă a celui mai mare divizor comun a două polinoame.

Definiție. C.m.m.d.c. a două polinoame A și B din $K[X]$ este orice polinom D din $K[X]$, care divide și pe A și pe B și care în plus are proprietatea că orice divizor comun al polinoamelor A și B divide și pe D. Se scrie $D = \text{c.m.m.d.c.}(A, B)$; se citește „$D$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor A și B".

Rezultă că dacă $D_1 = \text{c.m.m.d.c.}(A, B)$, atunci $D \mid D_1$ și $D_1 \mid D$; prin urmare, D și D_1 sînt polinoame asociate. Reciproc, *dacă D este c.m.m.d.c. (A, B) orice polinom asociat cu D, adică orice polinom de forma αD cu $\alpha \in K^*$ este și el c.m.m.d.c. (A, B).*

Exemplu. Dacă $A = X^2 - 1$ şi $B = X^3 - 1$, orice polinom de forma $\alpha(X - 1)$ cu $\alpha \in K$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $X^2 - 1$ şi $X^3 - 1$.

Într-adevăr $\alpha D \mid A$, pentru că $D \mid A$ şi $\alpha D \mid D$. Pentru acelaşi motiv $\alpha D \mid B$ şi orice polinom C, care divide pe A şi pe B, divide pe D; prin urmare şi pe αD.

8.3.2. În clasa polinoamelor care sînt c.m.m.d.c. (A, B) există unul singur care are coeficientul dominant egal cu $+1$; acela se notează cu simbolul (A, B) şi el se numeşte de obicei c.m.m.d.c. al polinoamelor A şi B. Astfel, cu această convenţie avem

$$(X^3 - 1, X^2 - 1) = X - 1.$$

Convenţia se face pentru a simplifica raţionamentele cu c.m.m.d.c. precizîndu-l.

Teoremă. *Fie A şi B două polinoame nenule din $K[X]$; există un c.m.m.d.c. (A, B) şi dacă D este un c.m.m.d.c. (A, B), există două polinoame P şi $Q \in K[X]$ astfel încît să putem scrie*

$$D = AP + BQ.$$

Demonstraţie. Să scriem formula împărţirii cu rest pentru polinoamele A şi B, presupunînd $\operatorname{gr} A \geqslant \operatorname{gr} B$,

$$A = BC_1 + R_1.$$

Polinomul R_1 este nul sau $0 \leqslant \operatorname{gr} R_1 < \operatorname{gr} B$. Dacă R_1 este nul, atunci B este un c.m.m.d.c. (A, B), căci $B \mid A$, $B \mid B$, iar din $C \mid A$, $C \mid B$, rezultă în mod banal că $C \mid B$. Dacă R_1 nu este nul, orice divizor comun al lui A şi B divide şi polinomul

$$R_1 = A - BC_1;$$

în particular $(A, B) \mid R_1$. Cum $(A, B) \mid B$, rezultă $(A, B) \mid (B, R_1)$.

Reciproc, orice divizor comun al polinoamelor R_1 şi B divide şi pe A, deci şi pe (A, B); în particular $(B, R_1) \mid (A_1, B)$.

Deci (A, B) şi (B, B_1) sînt polinoame asociate; cum au şi acelaşi coeficient dominant (egal cu $+1$), ele sînt egale:

$$(A, B) = (B, R_1).$$

Scriem formula împărţirii cu rest pentru polinoamele B, R_1; avem

$$B = R_1 C_2 + R_2.$$

Dacă $R_2 = 0$, R_1 este divizor al lui B şi, prin urmare, (B, R_1) se obţine din R_1 prin înmulţire cu un factor (cu inversul coeficientului dominant al lui R_1). În acest caz $(A, B) = (B, R_1)$. Dacă $R_2 \neq 0$

și gr $R_2 > 0$, scriem din nou formula împărțirii cu rest pentru R_1 și R_2 și obținem

$$(A,\ B) = (B,\ R_1) = (R_1,\ R_2).$$

Continuînd raționamentul, obținem un șir de polinoame

$$B,\ R_1,\ R_2,\ \ldots \tag{8.3}$$

pentru care șirul gradelor este strict descrescător,

$$\text{gr } B > \text{gr } R_1 > \text{gr } R_2 > \ldots$$

Numărul termenilor acestui șir este mai mic sau egal cu gr $B + 1$. Prin urmare, după un număr finit de etape, se ajunge la un rest R_s care divide restul precedent R_{s-1}; rezultă $(R_{s-1},\ R_s) = \frac{1}{\alpha} R_s$, dacă înseamnăm cu α coeficientul dominant al polinomului R_s. Prin urmare

$$(A, B) = (B, R_1) = \ldots = (R_{s-1}, R_s) = \frac{1}{\alpha} R_s.$$

Recapitulînd relațiile dintre termenii șirului (8.3), avem

$$\begin{aligned}
A &= BC_1 + R_1,\\
B &= R_1C_2 + R_2,\\
R_1 &= R_2\,C_3 + R_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_{s-2} &= R_{s-1}\,C_s + R_s,\\
R_{s-1} &= R_sC_{s+1}.
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Din acest sistem se pot elimina polinoamele $R_1, \ldots, R_{s-1}$, prin substituiri succesive; înlocuind în ecuația a doua pe R_1 cu expresia $A - BC_1$ din prima, obținem

$$R_2 = B - (A - BC_1)\,C_2 = B(1 + C_1C_2) - AC_2;$$

înlocuind în ecuația a treia pe R_1 și R_2 cu expresiile din ecuațiile precedente, obținem

$$\begin{aligned}
R_3 &= A - BC_1 - [B(1 + C_1C_2) - AC_2]\,C_3 =\\
&= A\,(1 + C_2C_3) - B\,(C_1 + C_3 + C_1C_2C_3).
\end{aligned}$$

Expresiile obținute pentru R_2 și R_3 le introducem în ecuația următoare și obținem pe R_4 etc. Observăm că R_1, R_2 și R_3 sînt de forma $AE + BF$, adică liniare și omogene în A și B.

Din ecuațiile (8.4) se vede că același lucru se poate spune și despre celelalte polinoame $R_4, \ldots, R_s$; în particular, R_s se obține înmulțind pe A și B cu niște polinoame, adunînd produsele căpătate și împărțind la coeficientul dominant al lui R_s, avem

$$D = (A, B) = \frac{1}{\alpha} R_s = AP + BQ,$$

unde P și Q sînt niște polinoame care rezultă din eliminarea lui $R_1, \ldots, R_{s-1}$ și împărțirea cu α.

Dacă gr $R_s > 0$, c.m.m.d.c. (A, B) este un polinom $D = AP + BQ$; dacă gr $R_s = 0$, $R_s = \alpha$ și c.m.m.d.c. (A, B) este egal cu 1, avem egalitatea

$$1 = AP + BQ, \tag{8.5}$$

care este *condiția necesară și suficientă pentru ca polinoamele A și B să nu aibă divizori comuni, diferiți de elementele inversabile ale acestora.*

8.3.3. **Definiție.** *Polinoamele $A, B, C, \ldots$* se numesc *prime între ele* dacă singurii lor divizori comuni sînt elementele inversabile din $K[X]$, adică dacă nu există în $K[X]$ nici un polinom de grad pozitiv, care să le dividă pe toate. Rezultatul obținut se poate formula în

Teorema lui Bézout. *Condiția necesară și suficientă ca polinoamele A, B din $K[X]$ să fie prime între ele este dată de relația* (8.5), *în care P și Q sînt polinoame din $K[X]$.*

Polinoamele P și Q se determină prin aplicarea repetată a formulei împărțirii cu rest.

Acest procedeu poartă numele de *algoritmul lui Euclid.*

Exemple. Fie $A = X^4 - X^3 - 3X + 3$, $B = 2X^3 - 2X^2 - X + 1$. Observăm că $(A, B) = (2A, B)$. De aceea și pentru a nu lucra cu numere fracționare, căutăm restul împărțirii lui $2A$ cu B:

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 2X^3 - 6X + 6 & 2X^3 - 2X^2 - X + 1 \\ \hline -2X^4 + 2X^3 + X^2 - X & X \\ \hline X^2 - 7X + 6 & \end{array}$$

Astfel $R_1 = X^2 - 7X + 6$. Căutăm acum pe (B, R_1):

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 - 2X^2 - X + 1 & X^2 - 7X + 6 \\ \cline{2-2} -2X^3 + 14X^2 - 12X & 2X + 12 \\ \cline{1-1} 12X^2 - 13X + 1 & \\ -12X^2 + 84X - 72 & \\ \cline{1-1} 71X - 71 & \end{array}$$

Prin urmare, $R_2 = 71X - 71$; putem lua în locul lui R_2 polinomul asociat $X - 1$; se găseşte că $(R_1, R_2) = X - 1$, aplicînd încă o dată împărţirea lui R_1 cu R_2. Astfel $(A, B) = X - 1$. Avem

$$2A = BX + R_1,$$

$$B = R_1(2X + 12) + 71(X - 1).$$

Din aceste ecuaţii deducem, eliminînd pe R_1,

$$B - (2X + 12)(2A - BX) = 71(X - 1),$$

$$D = X - 1 = \frac{-4}{71}(X + 6)A + \frac{1}{71}(2X^2 + 12X + 1)B.$$

Să se verifice această identitate!

8.4. Unicitatea descompunerii în factori ireductibili în inelul $K[X]$

Teoremă. *Fie A, B, C polinoame din $K[X]$; dacă C este prim cu A şi divide produsul AB, atunci C divide polinomul B.*

Pe scurt: $(A, C) = 1$ şi $C \mid AB \Rightarrow C \mid B$.

Într-adevăr, conform teoremei lui Bézout, dacă C şi A sînt prime între ele, există P şi $Q \in K[X]$ astfel încît

$$AP + CQ = 1.$$

Înmulţind cu B, obţinem

$$ABP + BCQ = B.$$

Deoarece C divide produsul AB, există un polinom R astfel încît $AB = CR$; prin urmare

$$C(RP + BQ) = B,$$

de unde rezultă, evident, că C divide polinomul B.

Corolar. Fie $P, Q_1, \ldots, Q_r \in K[X]$; *dacă* P *este ireductibil şi divide produsul* $Q_1 Q_2 \ldots Q_r$, *atunci cel puţin unul dintre factorii* $Q_1 \ldots Q_r$ *este divizibil cu* P.

Demonstraţia se face prin inducţie asupra lui r, folosind teorema precedentă. Pentru $r = 2$, sîntem în cazul acelei teoreme. Să presupunem că afirmaţia este adevărată pentru produsul de factori în număr mai mic decît n. Împărţind factorii $Q_1, \ldots, Q_r$ în două grupe $Q_1, \ldots, Q_s$ şi $Q_{s+1}, \ldots, Q_r$, să punem $A = Q_1 \ldots Q_s$, $B = Q_{s+1} \ldots Q_r$.

Prin ipoteză $P \mid AB$. Dacă P divide produsul A, concluzia rezultă în baza ipotezei de inducţie (că este adevărată pentru un număr inferior lui r de factori); dacă P nu divide produsul A, atunci P, fiind ireductibil, este prim cu A; prin urmare, în baza teoremei precedente divide produsul B şi, tot în baza ipotezei de inducţie, divide unul dintre factori $Q_{s+1}, \ldots, Q_r$. Astfel afirmaţia este demonstrată.

A fost demonstrat (v. 7.1.) că orice polinom din $K[X]$ se poate scrie ca produs de polinoame ireductibile în $K[X]$ în număr finit. Acum putem demonstra

Teorema de unicitate a descompunerii în factori primi în $K[X]$. *Orice polinom din* $K[X]$ *este ireductibil în* $K(X)$ *sau se poate scrie într-un singur mod ca produs (finit) de polinoame ireductibile, abstracţie făcînd de înmulţirea cu elemente inversabile din* $K[X]$ *şi de ordinea factorilor.*

Într-adevăr, să presupunem că avem

$$A = P_1 P_2 \ldots P_r = Q_1 Q_2 \ldots Q_s,$$

P_i, Q_j fiind polinoame ireductibile. Să considerăm polinomul P_1; produsul $Q_1 \ldots Q_s$ este divizibil prin polinomul ireductibil P_1. Conform corolarului precedent, cel puţin unul dintre factorii acestui produs este divizibil cu P_1. Să presupunem că $P_1 \mid Q_1$. Cum Q_1 este ireductibil, rezultă că P_1 şi Q_1 sînt asociate, adică putem scrie

$$Q_1 = \alpha_1 P_1 \text{ cu } \alpha_1 \in K^*.$$

Să împărţim cu P_1 în ambele părţi ale semnului de egalitate; obţinem

$$P_2 \ldots P_r = \alpha_1 Q_2 \ldots Q_s.$$

Reluînd acum raţionamentul cu P_2, vom găsi că printre factorii $Q_2, \ldots, Q_s$ este unul asociat cu P_2 şi, renumerotîndu-i la nevoie, putem presupune că acela este Q_2; deci $Q_2 = \alpha_2 P_2$ cu $\alpha_2 \in K^*$. Împărţind cu P_2, obţinem

$$P_3 \ldots P_r = \alpha_1 \alpha_2 Q_3 \ldots Q_s.$$

Să presupunem că $r < s$. Repetînd raţionamentul făcut cu P_1 şi P_2 pentru factorii $P_3, \ldots, P_r$ şi împărţind succesiv cu aceşti factori, obţinem

$$1 = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r Q_{r+1} \ldots Q_s.$$

O asemenea egalitate nu este posibilă din cauză că gradul unui produs de polinoame este egal cu suma gradelor factorilor. Astfel ipoteza $r < s$ este absurdă; în acelaşi mod se poate arăta că inegalitatea $r > s$ nu este cu putinţă; prin urmare, $r = s$ şi fiecare dintre factorii P_i apare în ambele părţi ale semnului de egalitate exact de acelaşi număr de ori. Teorema este demonstrată.

8.5. Corpul fracţiilor inelului $K[X]$

8.5.1. După cum s-a văzut, $K[X]$ este un inel integru (v. 8.1); prin urmare, are un corp de fracţii (v. 5.5), pe care-l vom nota cu simbolul $K(X)$ şi-l vom numi *corpul fracţiilor raţionale.*

Elementele corpului $K(X)$ se numesc *fracţii raţionale.*

Fie $\frac{A}{B}$ o fracţie raţională. Numărătorul A şi numitorul B ale fracţiei sînt polinoame din $K[X]$; fiecare dintre ele se descompune în factori ireductibili

$$A = P_1^{p_1} P_2^{p_2} \ldots P_r^{p_r}, \quad B = P_1^{q_1} P_2^{q_2} \ldots P_r^{q_r},$$

p_i şi q_i fiind întregi pozitivi sau zero, unic determinaţi. Deci putem scrie în mod unic

$$\frac{A}{B} = P_1^{p_1 - q_1} P_2^{p_2 - q_2} \ldots P_r^{p_r - q_r}$$

În special, în calculul diferenţial şi integral, se foloseşte *descompunerea aditivă a unei fracţii raţionale în elemente simple.*

Teoremă. *Să presupunem că este dată o fracţie raţională* $F = \frac{A}{B}$ *din* $K(X)$; *dacă* $B = Q_1^{m_1} Q_2^{m_2} \ldots Q_r^{m_r}$ *şi dacă* $Q_1, \ldots, Q_r$ *sînt polinoame ireductibile în* $K[X]$ (*diferite între ele*), *iar* m_i *întregi pozitivi, atunci* F *se poate scrie în mod unic sub forma*

$$F = P_0 + \frac{P_1}{Q_5^{m_1}} + \frac{P_2}{Q_2^{m_1}} + \ldots + \frac{P_r}{Q_r^{m_r}}, \tag{8.6}$$

unde $P_0, P_1, \ldots, P_r$ *sînt polinoame din* $K[X]$ *şi* $\operatorname{gr} P_i < \operatorname{gr} Q_i^{m_i}$.

Demonstrație. Polinomul P_0, partea întreagă a fracției F, este cîtul împărțirii lui A la B (8.2) : $A = P_0B + C$, unde C este un polinom din $K[X]$, astfel încît $0 \leqslant \text{gr } C < \text{gr } B$. Se poate scrie

$$F = \frac{A}{B} = \frac{P_0B + C}{B} = P_0 + \frac{C}{B}. \tag{8.6'}$$

Observăm că polinoamele P_0 și C sînt unic determinate ca fiind unul cîtul și celălalt restul împărțirii lui A cu B.

Acum procedăm prin inducție asupra lui r. Dacă $r = 1$, nu avem nimic de demonstrat, relația (8.6) este totuna cu (8.6').

Să presupunem că orice fracție de forma $\frac{A_1}{B_1}$ cu $\text{gr } A_1 < \text{gr } B_1$ și $B_1 = Q_1 \dots Q_r^{m_r}$ cu $r \leqslant n$ și Q_i ireductibile și diferite între ele, se poate pune în mod unic sub forma $\frac{P_1}{Q_1^{m_1}} + \dots + \frac{P_r}{Q_r^{m_r}}$ cu $\text{gr } P_i < \text{gr } Q_i^{m_i}$ și să considerăm o fracție $\frac{C}{B}$ pentru care numitorul este de forma

$$B = Q_1^{m_1} \dots Q_n^{m_n} Q_{n+1}^{m_{n+1}} \quad \text{și} \quad \text{gr } C < \text{gr } B.$$

Putem scrie $B = B_1 B_2$ cu $B_1 = Q_1^{m_1} \dots Q_n^{m_n}$, $B_2 = Q_{n+1}^{m_{n+1}}$.

Polinoamele B_1 și B_2 sînt prime între ele ; prin urmare putem scrie identitatea lui Bézout (v. 8.3.2)

$$B_1G_1 + B_2G_2 = 1$$

cu G_1, G_2 polinoame din $K[X]$, convenabil alese. Înmulțind această identitate cu C, obținem

$$C = B_1G_1C + B_2G_2C. \tag{8.7}$$

Să scriem identitatea împărțirii cu rest pentru polinoamele G_1C și B_2 :

$$G_1C = B_2D + A_2, \quad 0 \leqslant \text{gr } A_2 < \text{gr } B_2.$$

Înlocuind pe G_1C în (8.7) cu această expresie, obținem

$$C = B_1A_2 + B_2(G_2C + B_1D).$$

Să punem $A_1 = G_2C + B_1D$; avem

$$C = B_1A_2 + B_2A_1 ;$$

prin urmare

$$\frac{C}{B} = \frac{B_1A_2 + B_2A_1}{B_1B_2} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2},$$

cu gr $A_2 <$ gr B_2. Dar observăm că, deoarece gr $C <$ gr $B =$ gr $B_1 +$ + gr B_2 și gr $(B_1A_2) =$ gr $B_1 +$ gr $A_2 <$ gr $B_1 +$ gr B_2, rezultă gr $(B_2A_1) =$ gr $(C - B_1A_2) <$ gr $B_1 +$ gr B_2; prin urmare, gr $A_1 <$ $<$ gr B_1.

Astfel $\frac{A_1}{B_1}$ este o fracție care, în baza ipotezei de inducție, se poate scrie sub forma

$$\frac{P_1}{Q_1^{m_1}} + \ldots + \frac{P_n}{Q_n^{m_n}}.$$

Cum $B_2 = Q_{n+1}^{m_{n+1}}$, punînd $A_2 = P_{n+1}$, rezultă că teorema este demonstrată și în cazul $r = n + 1$.

Unicitatea se demonstrează în modul următor:

Să presupunem că

$$\frac{C}{B} = \frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1'}{B_1} + \frac{A_2'}{B_2}$$

cu gr $A_i <$ gr B_i, gr $A_i' <$ gr B_i', $i = 1,2$.

$$\text{Deci } \frac{A_1 - A_1'}{B_1} = \frac{A_2' - A_2}{B_2}$$

și, mai departe,

$$(A_1 - A_1')\,B_2 = (A_2' - A_2)\,B_1.$$

Polinomul B_1 este prim cu B_2 și divide produsul $(A_1 - A_1')B_2$; prin urmare, $A_1 - A_1'$ este divizibil cu B_1. Cum gr $(A_1 - A_1') <$ gr B_1, rezultă $A_1 - A_1' = 0$. La fel $A_2 - A_2' = 0$; prin urmare $A_i' = A_i$.

Astfel rezultă demonstrat că P_{n+1} este unic, $P_1, \ldots, P_n$ fiind unice prin ipoteza de inducție.

8.5.2. Fracția P/Q^m (Q ireductibil, gr $P <$ gr Q^m) se poate descompune mai departe, în modul următor: fie S și R_0 cîtul și restul împărțirii polinomului P prin Q:

$$P = QS + R_0, \quad (\text{gr } R_0 < \text{gr } Q);$$

fie apoi S_1 și R_1 cîtul și restul împărțirii lui S prin Q :

$$S = QS_1 + R_1, \quad (0 \leqslant \text{gr } R_1 < \text{gr } Q).$$

Rezultă $P = R_0 + R_1Q + S_1Q^2$.

Scriind acum pentru S_1 și Q formula împărțirii cu rest și procedînd în continuare în același mod cu toate cîturile succesive și notînd cu $R_2, R_3, \ldots$ resturile respective, găsim pentru P următoarea dezvoltare după puterile crescătoare ale lui Q :

$$P = R_0 + R_1Q + \ldots + R_{m-1}Q^{m-1}, \ (\text{gr } R_i < \text{gr } Q).$$

De aici, obținem pentru P/Q^m descompunerea

$$\frac{P}{Q^m} = \frac{R_0}{Q^m} + \frac{R_1}{Q^{m-1}} + \ldots + \frac{R_{m-1}}{Q}, \quad (\text{gr } R_i < \text{gr } Q). \tag{8.8}$$

Polinoamele R_i sînt unic determinate, după cum rezultă din identitatea împărțirii cu rest.

Aplicînd formula (8.8) fiecăruia dintre elementele descompunerii (8.6), obținem formula definitivă a reprezentării unei fracții raționale cu suma de *elemente simple*

$$F = \frac{A}{B} = P_0 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{h=1}^{m_i-1} \frac{R_{ih}}{Q_i^{m_i-h}}. \tag{8.9}$$

Exemple. Să se descompună în elemente simple fracția

$$F = \frac{X^5 + 1}{X^2 (X^2 + 1)^3}.$$

Să punem $Q_1 = X^2 + 1$, $Q_2 = X$; $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $B_1 = (X^2 + 1)^3$, $B_2 = X^2$. Găsim cu algoritmul lui Euclid sau cu metoda coeficienților nedeterminați :

$$G_1 = 1, \ G_2 = -(3 + 3X^2 + X^4), \ (B_1G_1 + B_2G_2 = 1), \ A = C = X^5 + 1.$$

$$\text{Avem } G_1C = X^5 + 1 = B_2X^3 + 1, \text{ deci } A_2 = 1, \ D = X^3,$$

$$A_1 = G_2C + B_1D = -(3 + 3X^2 + X^4)(X^5 + 1) + X^3(X^3 + 1)^3 =$$

$$= -3 - 3X^2 + X^3 - X^4 = -[(1 + X) + (1 - X)(1 + X^2) + (1 + X^3)^2].$$

Astfel

$$F = -\frac{1}{1 + X^2} - \frac{1 - X}{(1 + X^2)^2} - \frac{1 + X}{(1 + X^3)^3} + \frac{1}{X^3}.$$

8.6. Exerciții

1. Să se calculeze cîtul și restul împărțirii polinomului P prin Q în următoarele cazuri :

a) $P = 3X^4 + 2X^3 - X^2 + 1$, $\quad Q = X^3 + X + 2$.

b) $P = X^4 - X^3 + X - 2$, $\quad Q = X^2 - X + 2$.

c) $P = X^2 - 3iX - 5(1 + i)$, $\quad Q = X - 1 + i$, $\quad i = \sqrt{-1}$.

d) $P = 4X^3 + X^2$, $\quad Q = X + 1 + i$.

2. Să se arate că dacă polinomul

$$P = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

este divizibil cu $Q = ax^2 + 2bx + c$, P este cubul unui polinom, iar Q este pătratul unui polinom (presupunem că corpul coeficienților este corpul numerelor complexe).

Indicație. Se calculează restul împărțirii și se scrie că este nul ; se găsesc condițiile

$$c = \frac{b^2}{a}, \qquad d = \frac{b^3}{a^2} ;$$

de unde rezultă

$$P = \left(\sqrt[3]{a}\, x + \frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^3, \quad Q = \left(\sqrt{a}\, x + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2.$$

3. Să se determine p și q astfel ca polinomul $X^4 + pX^2 + q$ să fie divizibil cu $X^2 + pX + q$.

Indicație. Se calculează restul împărțirii și se anulează ; se găsesc soluțiile $p = q = 0$; $p = 0, q = -1$; $p = -1, q = 0$; $p = q = 1$; $p = -2, q = 1$.

4. Fie a și b numere reale, diferite între ele și $p(X)$ un polinom cu coeficienți reali ; să se arate că $p(X)$ este divizibil cu $(X^n - a)(X^n - b)$ dacă și numai dacă este divizibil cu $X^n - a$ și cu $X^n - b$.

Indicație. Se va observa că $X^n - a$ și $X^n - b$ sînt prime între ele.

5. Să se găsească un polinom f de gradul cel mai mic posibil care, împărțit prin $P = X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$, să dea restul $X^3 + X + 1$, iar împărțit prin $Q = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$, să dea restul $2X^2 - 3$.

Indicație. Trebuie să avem $f = AP + X^3 + X + 1 = BQ + 2X^2 - 3$; $AP - BQ = -X^3 + 2X^2 - X - 4$; se vor lua A și B cu coeficienți nedeterminați (se pot lua de gradul al treilea), se fac înmulțirile, se scad produsele și se compară coeficienții în stînga și în dreapta semnului de egalitate.

6. 1° Să se afle cîtul și restul împărțirii polinomului $X^m - 1$ prin $X^n - 1$.

2° Ce relație trebuie să existe între m și n pentru ca împărțirea să se facă exact?

3° Să se arate că c.m.m.d.c. $(X^m - 1, X^n - 1)$ este $X^d - 1$, unde d = c.m.m.d.c. (m, n).

Indicație. 1° Se face împărțirea după schema obișnuită; 2° n/m; 3° Se aplică algoritmul lui Euclid celor două polinoame.

7. Să se găsească c.m.m.d.c. al polinoamelor P și C în următoarele cazuri:

1° $P = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$, $Q^4 = X^4 + 3X^3 + X^2 - 2$;

2° $P = X^4 + 5X^3 + 7X^2 + X - 2$, $Q = X^5 + 5X^4 + 4X^3 - 5X + 3$;

3° $P = aX^2 + bX + c$, $Q = X^4 + aX^2 + bX + c$.

R. 1° $X^2 + X + 1$; 2° $X^3 + 3X^2 + X - 1$; 3° Se vor distinge patru cazuri: 1) $c \neq 0$; 2) $c = 0$, $b \neq 0$; 3) $c = b = 0$, $a \neq 0$; 4) $c = b = a = 0$.

8. Să se arate că P divide polinomul Q_i și să se scrie cîtul în următoarele cazuri:

a) $P = X^2 + X + 1$, $Q_1 = X^{14} + X^7 + 1$, $Q_2 = (X+1)^{2n+1} + X^{n+2}$;

b) $P = X^2 - X + 1$, $Q_1 = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$, $Q_2 = (X-1)^{2n+1} + (-1)^{n+1} X^{n+2}$.

R. a) Se face împărțirea lui Q_1 la P; Q_2 se poate scrie $Q = (X+1)[(X^2 + X + 1) + X]^n + X^{n+2} = (X+1) \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p (X^2 + X + 1)^{n-1} X^p + X^n (X^2 + X + 1)$; $\frac{Q_2}{P} = (X+1) \sum_{p=0}^{n-1} C_n^p (X^2 + X + 1)^{n-p-1} X^p + X^n$. b) Se observă că, înlocuind pe $X - 1$ cu X, în Q_1 și în P, cazul se reduce la cel precedent; la fel dacă înlocuim pe X cu $-X$ în Q_2 și în P.

9. Să considerăm polinoamele $A(X)$, $B(X)$, $C(X)$, $D(X)$ din $K[X]$. Restul împărțirii polinomului $A(X)B(X) + C(X)$ prin $D(X)$ rămîne neschimbat, dacă înlocuim unele dintre polinoamele A, B, C cu ceea ce rămîne cînd scădem din ele polinoame divizibile cu D; în particular, nu se schimbă dacă înlocuim fiecare dintre aceste polinoame cu restul împărțirii sale prin D.

Exemplu. Restul împărțirii lui $A(x)$ prin $x^2 - a$ se găsește astfel: se pune $A(x)$ sub forma $B(x^2) + xC(x^2)$; restul este $B(a) + C(a)\,x$.

10. Să se arate că polinomul

$$P = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n)^n - x^n$$

este divizibil cu

$$Q = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

R. Observația precedentă ne arată că restul împărțirii lui P prin Q este același cu restul împărțirii lui $x^{n^2} - x^n - x^n[x^{(n-1)n} - 1]$ prin Q.

Ținînd seamă că $x^{(n-1)n} - 1 = (x^n)^{n-1} - 1$ este divizibil cu $x^n - 1 = (x - 1)Q$, rezultă ceea ce trebuia demonstrat.

11. Să se arate că polinomul

$$P = (x + 1)^{3n+2} + x + 2$$

este divizibil cu $Q = X^2 + 3X + 3$.

R. Folosim observația de la ex. 9, observînd că putem scrie $(x + 1)^3 = x(x^2 + 3x + 3) + 1$ și $P = (x + 1)^2 (x + 1)^{3n} + (x + 2)$. Înlocuind pe $(x + 1)^3$ cu 1 (restul împărțirii prin $x^2 + 3x + 3$), găsim că P împărțit la Q dă același rest ca și polinomul $(x + 1)^2 + x + 2 = x^2 + 3x + 3$.

12. Să se descompună în elemente simple fracțiile

$$F_1 = \frac{(x^2 + 1)^2 (x^2 + 2)}{x^4}, \quad F_2 = \frac{1}{x^4(1 - x)},$$

$$F_3 = \frac{x^5 + x^4}{(x^2 + x + 1)^3}, \quad F_4 = \frac{x^2}{(1 - x)^3 (1 + x^2)},$$

$$F_5 = \frac{x^2 + 1}{x^3 + 1}, \quad F_6 = \frac{1}{x^2(1 + x^2)^3}, \quad F_7 = \frac{1}{(x - 1)^2 x^4},$$

$$F_8 = \frac{x - 1}{(x^2 + 1)^2 (x + 1)}, \quad F_9 = \frac{x^5}{(x + 1)^2 (x^2 + x + 1)},$$

$$F_{10} = \frac{1}{(x^3 - 1)^2}, \quad F_{11} = \frac{x^8}{x^6 - 1}, \quad F_{13} = \frac{1}{x^3(1 - x)^2 (1 + x)},$$

$$F_{14} = \frac{1}{x^n (x - 1)},$$

13. Teorema descompunerii în elemente este valabilă în orice corp de fracții al unui domeniu de integritate cu împărțire euclideană; în particular este valabilă în corpul Q al numerelor raționale.

Să se redemonstreze teorema pentru acest corp și să se descompună în elemente simple fracțiile

$$\frac{100}{64}, \quad \frac{6887}{5400}, \quad \frac{122}{1323} \text{ și } \frac{1000}{675}.$$

§ 9. Funcții definite cu ajutorul polinoamelor

9.1. Să considerăm un corp C și un subcorp K al lui C. Pentru a fixa ideile, putem presupune că C este corpul numerelor complexe, iar drept K să luăm corpul Q al numerelor raționale.

Să considerăm un polinom $f \in K[X]$,

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n. \tag{9.1}$$

Se numește *valoare a* polinomului f în $u \in C$ elementul

$$a_0 + a_1 u + \ldots + a_n u^n$$

din C, obținut prin înlocuirea lui X din expresia (9.1) cu u.

Valoarea lui f în u se notează cu simbolul $f(u)$, care se citește: valoarea lui f în u sau, mai scurt, ef de u.

Se spune că u este un zero al lui f sau o rădăcină a lui f, dacă $f(u) = 0$. În felul acesta, fiecare polinom din $K[X]$ definește o funcție pe C cu valori în C; această funcție se numește *funcție polinom, (funcție polinomială), definită peste corpul* K. Se notează cu $f(x)$; x este *variabila* sau *nedeterminata*.

Exemple

1. Funcția liniară $f(x) = ax + b$ este un polinom.

2. Trinomul $ax^2 + bx + c$ definește o funcție polinom. În ambele cazuri, coeficienții a, b, c sînt elemente din corpul K, de exemplu numere raționale.

3. Funcția care face să corespundă fiecărui $u \in C$ același element din K, de exemplu 2, se numește *funcția constantă*; este tot o funcție polinom (polinomul care o definește se reduce la termenul liber, care este egal cu 2 în acest exemplu).

De asemenea, funcția care asociază fiecărui element $u \in C$ puterea m a lui u este o funcție polinom, definită de polinomul $h = X^m$. Elementul 0 din C este un zero al lui h.

9.2. Pentru că domeniul C al valorilor funcțiilor polinom este un corp, se pot defini operații de adunare, de înmulțire pentru funcțiile polinomiale (și de înmulțire cu elemente din C).

Astfel, dacă $f(x)$ și $g(x)$ sînt funcții polinom, suma lor $f(x) + g(x)$ este funcția care în elementul u are valoarea $f(u) + g(u)$; se vede că aceasta coincide cu funcția definită de polinomul $f + g$; la fel produsul funcțiilor definite de polinoamele f și g este funcția

care în u are valoarea $f(u)g(u)$ și se vede că această funcție coincide cu funcția definită de polinomul produs fg.

Rezultă de aici că funcțiile polinomiale formează un inel și că aplicația $f \to f(x)$ care asociază fiecărui polinom funcția polinomială definită de el este un omomorfism $K[X] \to C$.

9.3. Să considerăm acum un element u din C și aplicația $\varphi_u : K[X] \to C$, care asociază fiecărui polinom $f \in K[X]$ valoarea sa, $f(u)$, în u:

$$\varphi_u(f) = f(u).$$

Dacă f și g sînt polinoame din $K[X]$, avem

$$\varphi_u(f+g) = (f+g)(u) = f(u) + g(u) = \varphi_u(f) + \varphi_u(g),$$

$$\varphi_u(fg) = (fg)(u) = f(u)\,g(u) = \varphi_u(f)\,\varphi_u(g).$$

Prin urmare, aplicația φ_u este un omomorfism al inelului de polinoame $K[X]$ în corpul C.

Să se compare cu atenție aplicația φ_u cu funcția definită de un polinom f: amîndouă au valorile în C, dar, pe cînd argumentul funcției polinomiale $f(x)$ parcurge mulțimea C (mulțimea pe care este definită funcția), funcția φ_u este definită pe inelul $K[X]$.

Pe cînd funcția polinomială este definită cu ajutorul unui polinom fix f, funcția φ_u este definită cu ajutorul unui element fix. Elementul $u \in C$ se zice algebric peste K, dacă există, cel puțin, un polinom $f \in K[X]$ nenul, care-l admite pe u ca rădăcină: $f(u) = 0$. Altfel spus, *u este algebric peste K, dacă este rădăcina unui polinom nenul din $K[X]$*.

Astfel 2, $\sqrt{2}$, $i = \sqrt{-1}$ sînt algebrice peste corpul numerelor raționale, fiindcă sînt rădăcini ale polinoamelor $X - 2$, $X^2 - 2$, $X^2 + 1$, respectiv.

Numerele complexe algebrice peste corpul Q al numerelor raționale se numesc *numere algebrice*, fără atributul „peste corpul numerelor raționale" care se subînțelege.

Astfel $z = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ este număr algebric peste corpul $Q(\sqrt{2})$, căci $(z - \sqrt{2})^2 = 3$; prin urmare, z este rădăcină a polinomului $X^2 - 2\sqrt{2}X - 1$; de asemenea, z este algebric peste corpul $Q(\sqrt{3})$, deoarece $(z + \sqrt{3})^2 = 2$, de unde se vede că z este rădăcina a polinomului $X^2 + 2\sqrt{3}X + 1$ din $Q(\sqrt{3})[X]$.

Dar, din $z^2 - 1 = 2\sqrt{2}z$, prin ridicare la pătrat, deducem $(z^2-1)^2 = 8z^2$; prin urmare, z este rădăcină a polinomului $z^4 - 10z^2 + 1$; z este algebric (peste Q). Se poate arăta că $2^{\sqrt[3]{2}}$ nu este algebric.

Orice element din C care nu este algebric peste K se numeşte *transcendent* faţă de acest corp.

Astfel $2^{\sqrt{2}}$, π, e (baza logaritmilor naturali) sînt numere transcendente faţă de corpul Q.

9.4. **Teoremă.** Fie $f \in K[X]$. *Un element α din K este o rădăcină a polinomului f, dacă şi numai dacă $X - \alpha$ divide pe f.*

Într-adevăr, conform formulei de împărţire cu rest, putem scrie

$$f = (X - \alpha)\, g + r, \tag{9.2}$$

cu $g \in K[X]$ şi $r \in K$ (pentru că $0 \leqslant \operatorname{gr} r < 1$, adică $\operatorname{gr} r = 0$).

Înlocuind pe X în această relaţie cu α, obţinem

$$f(\alpha) = r.$$

Reţinem acest rezultat: *restul împărţirii unui polinom f prin $X - \alpha$* este egal cu valoarea polinomului pentru $X = \alpha$.

Rezultă că *f este divizibil cu $X - \alpha$ dacă şi numai dacă $f(\alpha) = 0$*, c.c.t.d. Un corolar important al acestei teoreme este următorul:

Dacă $f(X)$ divide polinomul $p(X)$, orice rădăcină a lui $f(X)$ este rădăcină a lui $p(X)$.

Căci dacă $X - \alpha$ divide polinomul $f(X)$, divide orice multiplu $p(X)$ al acestui polinom.

Calculul efectiv al cîtului $g(X)$ şi al restului împărţirii polinomului f prin $X - \alpha$ se face, fie prin algoritmul împărţirii, fie prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, după cum urmează.

Să scriem explicit polinoamele f şi g:

$$f(X) = a_0 X^n + a_1, X^{n-1} + \ldots + a_n{}^1,$$

$$g(X) = b_0 X^{n-1} + b_1 X^{n-2} + \ldots + b_{n-1}.$$

Înlocuind şi relaţia (9.2) polinoamele f şi g cu aceste expresii ale lor şi comparînd coeficienţii termenilor de acelaşi grad, obţinem următorul sistem de relaţii:

$$\begin{aligned}
a_0 &= b_0, \\
a_1 &= b_1 - \alpha b_1, \\
a_2 &= b_2 - \alpha b_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} &= b_{n-1} - \alpha b_{n-2}, \\
a_n &= r - \alpha b_{n-1}.
\end{aligned}$$

Din acest sistem rezultă formule pentru calculul coeficienților b_0, $b_1, \ldots, b_{n-1}$ și a restului r, din aproape în aproape (prin recurență):

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1 + \alpha b_0, \quad b_2 = a_2 + \alpha b_1, \ldots,$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2}, \quad r = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Calculele se dispun în schema lui Horner:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
α	a_0	$a_1 + \alpha b_0$	$a_2 + \alpha b_1$	$\ldots$	$a_{n-1} + \alpha b_{n-2}$	$a_n + \alpha b_{n-1}$
	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-1}	r

Exemple. Să găsim cîtul și restul împărțirii polinomului $f(x) = 3X^5 - 2X^3 + X^2 - 3$ prin $X - 2$:

	3	0	-2	1	0	-3
2	3	$0 + 6$	$-2 + 12$	$1 + 20$	$0 + 42$	$-3 + 84$
	3	6	10	21	42	81

Să împărțim același polinom prin $X + 2$:

	3	0	-2	1	0	-3
-2	3	$0 + 6$	$-2 + 12$	$1 - 20$	$0 + 38$	$-3 - 76$
	$+3$	$+6$	$+10$	-19	38	-79

Teoremă. *Orice polinom $f \in K[X]$ are cel mult n rădăcini în corpul K, dacă n este gradul lui f.*

Demonstrația acestei teoreme se face prin inducție asupra gradului n.

Dacă $n = 0$, f este o constantă diferită de zero (polinomul nul nu are grad); prin urmare, nu are nici o rădăcină și teorema este adevărată în acest caz.

Să presupunem acum că teorema este adevărată pentru toate polinoamele de grad mai mic sau egal cu $n - 1$ și fie f un polinom de gradul n, ca în enunț. Dacă f nu are nici o rădăcină în K, nu avem nimic de demonstrat. Să presupunem însă că f are o rădăcină a în K; atunci putem scrie $f = (X - a)\, g$, g fiind un polinom de gradul $n - 1$, cuprins și el în $K[X]$.

Orice altă rădăcină b a lui f, diferită de a, trebuie să satisfacă relaţia

$$f(b) = (b - a)\, g(b).$$

Deoarece $b - a \neq 0$, trebuie să avem $g(b) = 0$. Prin urmare, rădăcinile lui f diferite de a sînt şi rădăcini ale lui g. Prin ipoteza de inducţie, numărul lor este cel mult egal cu $n - 1$ (gradul lui g). Aceasta înseamnă că f are cel mult n rădăcini cuprinse în K.

Exemple. Fie $K = Q$, corpul numerelor raţionale şi $f \in Q[X]$. Dacă gr $f = 1$, atunci f este de forma $a + bX$, cu $b \neq 0$; f are rădăcina $-a/b$.

Polinomul $2 + X^2$ nu are nici o rădăcină în Q.

O altă demonstraţie a teoremei rezultă din unicitatea descompunerii în factori ireductibili a unui polinom din $K[X]$, observînd că factorii liniari sînt ireductibili şi că numărul lor nu poate depăşi gradul polinomului. O consecinţă importantă a teoremei relativă la numărul rădăcinilor unui polinom este următorul

Corolar. *Dacă $f(X)$ şi $g(X)$ sînt polinoame de grad mai mic decît n şi dacă aceste polinoame au valori egale pentru n valori diferite ale variabilei, atunci aceste polinoame sînt egale.*

Într-adevăr, există numai două posibilităţi: polinomul $f(X) - g(X)$ este polinomul nul sau are gradul mai mic decît n. Această din urmă alternativă este însă în contradicţie cu teorema precedentă, pentru că $f(X) - g(X)$ are, prin ipoteză, n rădăcini distincte.

Deci pentru un corp C care are o infinitate de elemente (cum este cazul corpului Q al numerelor raţionale, al corpului real R sau al corpului numerelor complexe) omomorfismul inelului $K[X]$ (al polinoamelor cu coeficienţi într-un corp $K \subset C$ pe inelul funcţiilor polinomiale definite peste K (v. 9.2) este injectiv: duce polinoame diferite în funcţii polinomiale diferite. Dacă $f(u) = g(u)$ pentru toţi $u \in C$, polinoamele f şi g sînt egale, în virtutea corolarului de mai înainte.

Astfel inelul funcţiilor polinomiale definite peste unul din corpurile uzuale (al numerelor raţionale, reale, complexe) se poate identifica cu inelul polinoamelor. Există însă corpuri (finite) pentru care această identificare nu este permisă.

Întrucît considerăm numai corpuri pentru care este permisă identificarea inelului funcţiilor polinomiale cu inelul respectiv de polinoame, vom numi adesea *polinoame* funcţiile polinomiale şi nu vom face deosebire între un polinom şi funcţia polinomială definită de el.

9.5. **Relaţii între rădăcinile unui polinom şi coeficienţii săi.** Teorema precedentă afirmă că numărul rădăcinilor unui polinom nu

poate depăşi gradul acestuia ; ea nu ne spune care este numărul exact al rădăcinilor, nici nu ne spune dacă polinomul are sau nu rădăcini.

Se poate arăta că pentru orice corp K există un alt corp $\overline{K}$, astfel încît orice polinom din $K[X]$ are cel puţin o rădăcină în $\overline{K}$ şi chiar n rădăcini, dacă n este gradul polinomului.

Folosind proprietăţi ale corpului numerelor complexe C (proprietăţi care se studiază în analiză), se poate arăta că *orice polinom din* $C[X]$ (în particular orice polinom cu coeficienţi reali sau raţionali) *de grad pozitiv are cel puţin o rădăcină în* C.

Această teoremă a fost enunţată încă din 1629 (de către Girard) şi apoi în 1702 (de către Ozanam). D'Alembert este primul care a încercat să o demonstreze (1746) ; de aceea şi poartă numele de *teorema lui D'Alembert*. Gauss a dat prima demonstraţie riguroasă acestei teoreme (1799). Admitem fără demonstraţie teorema lui D'Alembert (demonstraţii se găsesc în [21], [26]).

Din teorema lui D'Alembert şi din prima teoremă din 9.4 rezultă că orice polinom $f(x)$ din $C[X]$ se poate pune sub forma

$$f(X) = (X - x_1)\, f_1(X),$$

cu $f_1(X) \in C[X]$; $\operatorname{gr} f_1(X) = \operatorname{gr} f(X) - 1$, $x_1 \in C$.

Dacă $f_1(X)$ nu se reduce la termenul său liber, are o rădăcină $x_2 \in C$, deci putem scrie

$$f(X) = (X - x_1)(X - x_2)\, f_2(X_n).$$

Reluînd raţionamentul asupra lui $f_2(X)$ şi continuînd pînă ajungem la un polinom de grad zero, deducem că orice polinom

$$f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n,\ a_i \in C,$$

se poate scrie sub forma

$$f(X) = a(X - x_1)\ (X - x_2) \ldots (X - x_n),$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ fiind rădăcinile lui $f(x)$; $x_i \in C$.

Efectuînd înmulţirile în a doua expresie a lui $f(X)$ şi comparînd apoi coeficienţii aceloraşi puteri ale lui X, obţinem

$$a_0 = a,$$

$$a_1 = -a(x_1 + \ldots + x_n),$$

$$a_2 = a(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_4 + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n),$$

$$a_3 = -a(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_1),$$

. . . . . .

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1} a (x_1 x_2 \ldots x_{n-1} + x_1 x_2 \ldots x_{n-2} x_n + \ldots + x_2 x_3 \ldots x_n),$$

$$a_n = (-1)^n a x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Din aceste relaţii, se deduc uşor relaţiile dintre rădăcinile polinomului şi coeficienţii săi

$$\frac{a_1}{a_0} = -\sum x_i, \quad \frac{a_2}{a_0} = \sum x_i x_j, \ldots, \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Observăm că în aceste relaţii apar nu coeficienţii polinomului, ci raportul fiecăruia dintre aceşti coeficienţi la coeficientul dominant, ceea ce este explicabil, pentru că rădăcinile polinomului depind numai de aceste rapoarte; putem înmulţi pe $f(X)$ cu orice număr fără ca rădăcinile să i se schimbe.

Dacă punem

$$\frac{a_1}{a_0} = c_1, \quad \frac{a_2}{a_0} = c_2, \ldots, \frac{a_n}{a_0} = c_n,$$

putem spune că între rădăcinile $x_1, \ldots, x_n$ şi coeficienţii polinomului normat

$$X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n$$

au loc relaţiile lui Viète:

$$c_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

$$c_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_1 x_n + x_2 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_n = (-1)^n x_1 x_2 \ldots x_n.$$

9.6. **Exerciţii şi complemente**

1. Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este număr algebric.

R. Se poate pune $Z = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ şi, izolînd întîi pe $\sqrt{3}$ şi ridicînd la pătrat, apoi pe $\sqrt{2}$ şi ridicînd din nou la pătrat, se dovedeşte că Z este rădăcina unui polinom de gradul patru.

Se poate face şi astfel: se consideră şirul $1, z, z^2, z^3, z^4$. Fiecare termen al acestui şir este o combinaţie liniară de 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ şi $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$. Astfel:

$$1 = 1,$$
$$z = \sqrt{2} + \sqrt{3},$$
$$z^2 = 5 + 2\sqrt{6},$$
$$z^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3},$$
$$z^4 = 49 + 20\sqrt{6}.$$

Se vede ușor că există numere raționale a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, astfel încît să avem $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 = 0$. Într-adevăr $a_0 + a_1 z^2 + \ldots + a_4 z^4 = a_0 \cdot 1 +$ $+ a_1 (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + a_2 (5 + 2\sqrt{6}) + a_3 (11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}) + a_4 (49 + 20\sqrt{6}) = (a_0 + 5a_2 +$ $+ 49 a_4) + (a_1 + 11a_3)\sqrt{2} + (a_1 + 9a_3)\sqrt{3} + (2a_2 + 20 a_4)\sqrt{6}$.

Această combinație liniară este nulă dacă și numai dacă (v. 6.7, exercițiul 6) avem separat:

$$a_0 + 5a_2 + 49 a_4 = 0,$$
$$a_1 + 11 a_3 = 0,$$
$$a_1 + 9 a_3 = 0,$$
$$2a_2 + 20 a_4 = 0.$$

Considerînd o soluție (nenulă) a acestui sistem, de exemplu $\{-1, 0, 10, 0, -1\}$, avem

$$-1 + 10 z^2 - z^4 = 0;$$

deci, z este algebric.

2. Să se arate că $\alpha = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$, $\gamma = i + \sqrt{2}$, $(i = \sqrt{-1})$, $\delta = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$ sînt numere algebrice.

Indicație. Se va vedea pe una dintre căile indicate la ex. 1 că α și γ sînt rădăcini ale unor polinoame de gradul patru; β este rădăcină a unui polinom de gradul opt; iar δ de gradul șase.

3. *Dacă α și β sînt numere algebrice, $\alpha + \beta$ este algebric.*

Demonstrația acestei propoziții se face pe calea indicată la exercițiul 1:

Dacă α este algebric, el satisface o ecuație de forma

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \tag{1}$$

cu $a_1, \ldots, a_n$ numere raționale.

Rezultă că putem scrie

$$\alpha^n = -a_1 \alpha^{n-1} - \ldots - a_n. \tag{2}$$

Astfel α^n depinde liniar (v. 6.3) de $\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, \ldots, \alpha, 1$, peste Q. Înmulțind în ecuația (1) cu α, deducem

$$\alpha^{n+1} = -a_1 \alpha^n - \ldots - a_n. \tag{3}$$

Înlocuind în această ecuație pe α^n cu expresia sa din (2), deducem că α^{n+1} este și el liniar dependent de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Repetînd raționamentul, se vede că și $\alpha^{n+2}, \ldots$ și orice putere a lui α se exprimă liniar cu ajutorul numerelor $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ cu coeficienți raționali.

La fel pentru numărul algebric β există un întreg natural m, astfel că orice putere a lui β este o combinație liniară de $1, \beta, \ldots, \beta^{m-1}$ cu coeficienți raționali.

Să punem $z = \alpha + \beta$ și să considerăm șirul

$$1, z, z^2, \ldots, z^{mn}. \tag{4}$$

Dacă dezvoltăm fiecare binom din acest șir și ținem seamă că puterile lui α (de la n în sus) sînt liniar dependente de $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ și, la fel, puterile lui β sînt liniar dependente de $1, \beta, \ldots, \beta^{m-1}$, găsim că toți termenii șirului (4) sînt liniar dependenți de următoarele mn numere :

$$\begin{aligned} &1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}, \\ &\beta, \alpha\beta, \ldots, \alpha^{n-1}\beta, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\beta^{m-1}, \alpha\beta^{m-1}, \ldots, \alpha^{n-1}\beta^{m-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Acum se vede, ca în exercițiul 1, că există $mn + 1$ numere raționale $a_0, a_1, \ldots, a_{mn}$, astfel încît să avem

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_{mn} z^{mn} = 0.$$

Într-adevăr, puterile lui z sînt liniar dependente de cele mn numere $\alpha^h \beta^k$ din tabloul (5), astfel încît $a_0 + a_1 z + \ldots + a_{mn} z^{mn}$ este o combinație liniară a numerelor $\alpha^h \beta^k$, cu coeficienți liniar dependenți de $a_0, a_1, \ldots, a_{mn}$. Egalînd cu zero acești coeficienți, obținem un sistem de mn ecuații liniare și omogene cu $mn + 1$ necunoscute $a_0, \ldots, a_{mn}$. Acesta are o soluție nenulă, care arată că z este algebric peste Q.

4. *Dacă α și β sînt numere algebrice, atunci și $\alpha\beta$ este un număr algebric.*

Demonstrația este asemănătoare cu cea de la exercițiul precedent : să punem $x = \alpha\beta$. Dacă α este rădăcina unui polinom de gradul n, β rădăcina unui polinom de gradul m (cum am presupus în exercițiul precedent), atunci

$$1, x, x^2, \ldots, x^{mn}$$

sînt liniar dependente peste Q. Ca să demonstrăm aceasta, este destul să observăm că $x^p = \alpha^p \beta^p$ este liniar dependent de numerele tabloului (5), cu coeficienți raționali, și să raționăm apoi ca și în exercițiul precedent.

5. *Dacă α este număr algebric, atunci și α^{-1} este număr algebric.*

Demonstrație. Dacă α este algebric, el satisface ecuația (1). Înmulțind în această ecuație cu α^{-m}, deducem

$$1 + a_1 \alpha^{-1} + \ldots + a_n (\alpha^{-1})^n = 0,$$

de unde rezultă că și α^{-1} este algebric. Propozițiile 3, 4 și 5 arată că numerele algebrice formează un subcorp al corpului numerelor complexe. Acest subcorp se numește *corpul numerelor algebrice.*

9.7. Funcții polinomiale de mai multe variabile

9.7.1. Să considerăm aceeași incluziune de corpuri $K \subset C$, ca în 9.1 și inelul polinoamelor în m nedeterminate, $K[X_1, \ldots, X_m]$. Un polinom $f \in K[X_1, \ldots, X_m]$ determină o funcție polinomială de m variabile $f(x_1, \ldots, x_m)$, definită peste K, și care asociază fiecărui sistem de elemente $u_1, \ldots, u_m$ din C elementul $f(u_1, \ldots, u_m)$.

Sistemul $u_1, \ldots, u_m$ este un zero pentru f, dacă $f(u_1, \ldots, u_m) = 0$.

Exemplu. Polinomul $X_1 X_2 - X_3^2$ definește o funcție polinomială $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - x_3^2$ de trei variabile; sistemul (1, 1, 1) este un zero pentru acest polinom.

Pentru funcțiile polinomiale de mai multe variabile se poate defini adunarea și înmulțirea întocmai ca pentru cele de o singură variabilă, astfel încît împreună cu aceste operații, funcțiile polinomiale de m variabile $x_1, \ldots, x_m$ formează un inel. Există un omomorfism al inelului $K[X_1, \ldots, X_m]$ pe inelul funcțiilor de polinoame de m variabile definite peste K; în acest omomorfism, fiecărui polinom îi corespunde funcția polinomială determinată de f.

Se poate arăta că, întocmai ca și în cazul funcțiilor polinomiale de o singură variabilă, omomorfismul de mai sus este injectiv (deci izomorfism), în cazul în care corpul C are o infinitate de elemente.

Pentru aceasta, este utilă următoarea

Teoremă. *Dacă C are o infinitate de elemente și f este un polinom în m nedeterminate, atunci există cel puțin un sistem de elemente $u_1, \ldots, u_m$ din C, astfel încît $f(u_1, \ldots, u_m) \neq 0$.*

Această teoremă generalizează la m variabile proprietatea polinoamelor într-o variabilă de a nu se anula decît pentru un număr finit de valori (cel mult egal cu gradul).

Demonstrație (prin inducție completă asupra numărului de variabile). Pentru $m = 1$, teorema a fost demonstrată (v. 9.4). Să o presupunem adevărată pentru polinoamele în $k \leqslant m - 1$ variabile și să considerăm un polinom în variabila X_m, $A_0 + A_1 X^m + \ldots + A_n X_m^n$, cu coeficienți A_i din $K[X_1, \ldots, X_{m-1}]$. Prin ipoteză, există un sistem de elemente $u_1, \ldots, u_{m-1}$, care nu anulează toți coeficienții A_i.

Să punem în locul variabilelor $X_1, \ldots, X_{m-1}$ elementele $u_1, \ldots, u_{m-1}$; obţinem un polinom în X_m nenul

$$f(u_1, \ldots, u_m, X_m) = A_0(u_1, \ldots, u_{m-1}) + A_1(u_1, \ldots, u_{m-1}) X_m + \ldots$$
$$\ldots + A_n(u_1, \ldots, u_{m-1}) X_m^n,$$

cu coeficienţi în $K(u_1, \ldots, u_{m-1})$.

Polinomul $f(u_1, \ldots, u_{m-1}, X_m)$ are cel mult n rădăcini în C; prin urmare, pentru orice $u_m \in C$, diferit de aceste n rădăcini,

$$f(u_1, \ldots, u_{m-1}, u_m) \neq 0, \text{ c.c.t.d.}$$

Din această teoremă rezultă că *singurul polinom în m variabile, care se anulează pentru toate sistemele de cîte m elemente* $u_1, \ldots, u_m$ *din* C, *este polinomul nul* (presupunem că C are o infinitate de elemente). Rezultă că două polinoame diferite nu pot defini aceeaşi funcţie polinomială.

Teorema precedentă şi corolarul său ne arată că funcţiile polinomiale de mai multe variabile, definite peste K, împreună cu adunarea şi înmulţirea obişnuite, formează un inel izomorf cu inelul $K[X_1, \ldots, X_m]$. Aceste două inele se identifică pentru corpurile uzuale şi de aceea se spune *polinom*, în loc de funcţie polinomială de mai multe variabile.

9.7.2. După cum polinoamele din $K[X]$ servesc la definirea elementelor algebrice din C, tot astfel polinoamele din $K[X_1, \ldots, X_m]$ servesc la definirea noţiunii de *dependenţă algebrică* între elemente din C.

Elementele $u_1, \ldots, u_m$ se numesc algebric dependente peste K, dacă există în $K[X_1, \ldots, X_m]$ cel puţin un polinom nenul $f(X_1, \ldots, X_m)$ astfel încît să avem $f(u_1, \ldots, u_m) = 0$. Dacă un astfel de polinom nu există, $u_1, \ldots, u_m$ se zic algebric independente.

A spune că $u_1, \ldots, u_m$ sînt algebric independente, este totuna cu a spune că sînt liniar independente peste K monoamele $u_1^{h_1} u_2^{h_2} \ldots u_m^{h_m}$, care se obţin făcînd pe $h_1, h_2, \ldots, h_m$ să parcurgă, independent unul de altul, mulţimea numerelor întregi nenegative. Într-adevăr, dacă aceste monoame sînt liniar independente, nu există polinom în m variabile nenul, pentru care $u_1, \ldots, u_m$ să fie un zero: dacă un astfel de polinom ar exista, am avea o relaţie de dependenţă liniară între aceste monoame (în care coeficienţii ar fi chiar coeficienţii polinomului), ceea ce este absurd; prin urmare $u_1, \ldots, u_m$ rezultă algebric independente. Reciproc, dacă $u_1, \ldots, u_m$ sînt algebric independente, nu există combinaţie liniară între un număr finit de monoame $u_1^{h_1} \ldots u_m^{h_m}$ cu coeficienţi nenuli; prin urmare, monoamele sînt liniar independente.

Exemple. 1. Să observăm acum că dacă perechile $(2h, 3k)$ și $(2h', 3k')$ coincid, atunci $h = h'$ și $k = k'$. Astfel, dacă în monoamele $u^h v^k$ care se obțin cînd h și k parcurg mulțimea întregilor nenegativi, punem în loc de u pe u^2 și în locul lui v pe v^3, obținem monoamele de aceeași formă; din monoame diferite obținem monoame diferite.

Dacă primele sînt liniar independente peste K, și monoamele de forma $u^{2h} v^{3k}$ rezultă liniar independente (căci fac parte dintre primele).

Rezultă că, dacă u și v sînt algebric independente peste K, u^2 și v^3 sînt de asemenea algebric independente peste K.

2. Polinoamele $x = uv + 1$ și $y = u^3 v^3 + 2$ sînt algebric dependente peste K, deoarece

$$(x - 1)^3 = y - 2,$$

prin urmare (x, y) este un zero al polinomului $X^3 - 3X^2 + 3X - Y + 1$.

9.7.3. Relația de divizibilitate se definește în inelul $K[X_1, \ldots, X_n]$, ca în orice inel și multe proprietăți ale relației de divizibilitate în $K[X]$ se regăsesc și în $K[X_1, \ldots, X_n]$, deși demonstrațiile sînt întrucîtva diferite. Noțiunea de polinom ireductibil se definește la fel ca și în $K[X]$. Polinoamele de gradul întîi sînt ireductibile în $K[X_1, \ldots, X_n]$, ca și în $K[X]$, tot pentru motivul că gradul produsului este egal cu suma gradelor factorilor.

Observăm că, întrucît la împărțirea unui polinom din $K[X]$ prin binomul $X - a$, coeficienții cîtului și restul se obțin prin operații exclusiv de adunare și înmulțire, adică numai prin operații de inel, identitatea împărțirii cu rest

$$f = (x - a)\, g + r$$

este valabilă într-un inel de polinoame $A[X]$, cu coeficienți într-un inel oarecare A. În particular, considerînd un polinom din $K[X_1, \ldots, X_n]$ ca polinom în X_n cu coeficienți în $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, putem scrie, pentru orice $A \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$:

$$F = (X_n - A)\, G + R,$$

unde R este un polinom din $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ și $G \in K[X_1, \ldots, X_n]$; acestea sînt unic determinate.

Rezultă apoi că R se obține din F prin înlocuirea lui X_n cu A. Prin urmare, F este divizibil cu $X_n - A$, dacă și numai dacă $F(X_1, \ldots, X_{n-1}, A) = 0$.

Exemple. 1. Polinomul $F = X^4 (Y - Z) + Y^4 (Z - X) + Z^4 (X - Y)$ este divizibil cu $X - Y$ în inelul $A[X, Y, Z]$, oricare ar fi inelul A cu element unitate, pentru că restul împărțirii lui F cu $X - Y$ este $R = Y^4 (Y - Z) + Y^4 (Z - Y) + Z^4 (Y - Y) = 0$, independent de inelul A.

2. La fel polinomul

$$G(X, Y, Z) = (Y - 1)(Z - 1)(Z - Y) + (Z - 1)(X - 1)(X - Z) + (X - 1)(Y - 1)(Y - X)$$

este divizibil cu $X - Y$ pentru că

$$G(Y, Y, Z) = (Y - 1)(Z - 1)(Z - Y) + (Z - 1)(Y - 1)(Y - Z) + \\ + (Y - 1)(Y - 1)(Y - Y) = 0.$$

3. Tot astfel în inelul $K[X_1, \ldots, X_m]$, determinantul lui Vandermonde

$$V(X_1, \ldots, X_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \\ X_1^2 & X_2^2 & \ldots & X_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_1^{n-1} & X_2^{n-1} & \ldots & X_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

este un polinom în $X_1, \ldots, X_n$, care se anulează dacă înlocuim pe X_1 cu X_2. Aceasta înseamnă că V_n este divizibil cu $X_1 - X_2$:

$$V = V(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 - X_2) P(X_1, \ldots, X_n).$$

De asemenea V se anulează dacă înlocuim pe X_1 cu X_3:

$$V(X_3, X_2, X_3, \ldots, X_n) = (X_3 - X_2) P(X_3, X_2, \ldots, X_n) = 0.$$

Cum $X_3 - X_2 \neq 0$, rezultă $P(X_3, X_2, \ldots, X_n) = 0$; prin urmare

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_1 - X_3) Q(X_1, \ldots, X_n),$$

deci

$$V(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) Q(X_1, \ldots, X_n).$$

Tot astfel V se anulează dacă înlocuim pe X_1 cu X_i, $i = 4, \ldots, n$, de unde rezultă, ca mai sus, că V este de forma

$$V(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 - X_2) \ldots (X_1 - X_n) R(X_1, \ldots, X_n).$$

Observăm acum că $V(X_1, \ldots, X_n)$ se anulează, dacă înlocuim pe X_2 cu X_i, $i = 3, \ldots, n$. Aceasta înseamnă că putem scrie

$$R(X_1, \ldots, X_n) = (X_2 - X_3) \ldots (X_2 - X_n) S(X_1, \ldots, X_n)$$

și deci

$$V(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 - X_2) \ldots (X_1 - X_n)(X_2 - X_3) \ldots (X_2 - X_n) S(X_1, \ldots, X_n).$$

Din nou $V(X_1, \ldots, X_n)$ se anulează dacă înlocuim pe X_3 cu X_i, $i = 4, \ldots, n$ de unde rezultă că

$$S(X_1, \ldots, X_n) = (X_3 - X_4) \ldots (X_3 - X_n) T(X_1, \ldots, X_n).$$

Tot astfel continuînd cu toate variabilele $X_4, \ldots, X_{n-1}$, deducem că

$$V(X_1, \ldots, X_n) = (X_1 - X_2)(X_1 - X_3) \ldots (X_1 - X_n)(X_2 - X_3) \ldots (X_2 - X_n) \ldots \\ \ldots (X_{n-1} - X_n) U.$$

Acum se poate vedea ușor că factorul U este de gradul (total) zero. Într-adevăr, fiecare termen al dezvoltării determinantului lui Vandermonde este de gradul $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$ (conține cîte un element din fiecare linie); prin urmare, gradul total al polinomului $V(X_1, \ldots, X_n)$ este $n(n-1)/2$. Dar parantezele $(X_1 - X_2), \ldots, (X_{n-1} - X_n)$ sînt în număr de $n(n-1)/2$; prin urmare, produsul lor este un polinom (omogen) de gradul $n(n-1)/2$. Aceasta arată că U este un polinom de gradul zero (se reduce la termenul liber). Pentru a-l calcula, observăm un termen din dezvoltarea determinantului, de exemplu termenul de pe diagonala principală $X_2X_3^2 \ldots X_n^{n-1}$; în partea dreaptă a semnului egal acesta figurează cu coeficientul $U(-1)^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} = U(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$; astfel $U(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad 1$.

9.7.4. Exerciții

1. Să se arate că polinomul

$$X^3 + Y^3 + Z^3 - (X + Y + Z)^3$$

este divizibil cu $(X + Y)(Y + Z)$; care este cîtul?

2. Să se arate că polinomul

$$(X + Y + Z)^{2n+1} - X^{2n+1} - Y^{2n+1} - Z^{2n+1}$$

este divizibil cu

$$(X + Y)(Y + Z)(Z + X).$$

3. Să se demonstreze identitatea

$$\begin{vmatrix} 1 & X^2 & X^3 \\ 1 & Y^2 & Y^3 \\ 1 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix} = (XY+YZ+ZX) \begin{vmatrix} 1 & X & X^2 \\ 1 & Y & Y^2 \\ 1 & Z & Z^2 \end{vmatrix}$$

fără a dezvolta determinanții. Generalizare. (Se raționează ca la determinantul Vandermonde).

4. Să se arate că matricele de forma

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

în care elementele a, b, c parcurg un inel A, formează un inel B. Din înmulțirea în B, să se deducă identitatea

$$(a^2 + b^2 + c^2 - 3abc)(x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz) = u^2 + v^2 + w^2 - 3uvw$$

cu $u = ax + bz + cy$, $v = az + by + cx$, $w = ay + bx + cz$.

(Se consideră determinanții).

5. Să se demonstreze identitatea

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^4 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^4 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^4 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^4 \end{vmatrix} = (a_1+a_2+a_3+a_4) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 \\ 1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3 \\ 1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3 \end{vmatrix}.$$

Să se generalizeze.

Indicație. Se înlocuiesc elementele a_i cu nedeterminate X_i, se raționează ca la determinantul Vandermonde și se observă că, în acest caz, factorul U este un polinom omogen de gradul întîi și simetric în X_1, X_2, X_3, X_4; se determină coeficientul unui termen din dezvoltare ca la determinantul lui Vandermonde.

6. Să se arate că determinantul

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

se poate scrie ca produs de factori liniari. Este un polinom simetric în x, y, z?

Indicație. Se adună la prima linie celelalte înmulțite cu $+1$ sau, cîte una din ele, cu $+1$, și celelalte cu -1, considerînd pe x, y, z ca variabile.

9.7.5. *Teorema fundamentală relativă la polinoame simetrice*

9.7.5.1. Polinoamele simetrice

$$s_1 = X_1 + \ldots + X_n,$$
$$s_2 = X_1 X_2 + \ldots + X_1 X_m + X_2 X_3 + \ldots + X_{m-1} X_m,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{x}$$
$$s_m = X_1 X_2 \ldots X_m$$

poartă numele de polinoame (funcții) simetrice elementare.

Orice polinom $p(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ devine, prin înlocuirea lui $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ cu $s_1, s_2, \ldots, s_m$, un polinom Q simetric în $X_1, X_2, \ldots, X_m$, pentru că rămîne neschimbat cînd executăm o permutare asupra variabilelor $X_1, \ldots, X_m$ (întrucît $s_1, \ldots, s_m$ rămîn neschimbate). Se numește *ponderea* unui monom $s_1^{h_1} s_2^{h_2} \ldots s_m^{h_m}$ numărul $h_1 + 2h_2 + \ldots + mh_m$. *Ponderea unui polinom* $p(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ este cea mai mare dintre ponderile monoamelor care figurează în $p(s_1, \ldots, s_m)$. Cu ajutorul noțiunii de pondere, putem demonstra

Teorema fundamentală relativă la polinoamele simetrice. *Orice polinom simetric în* $X_1, \ldots, X_m$, *de grad total* n, *se poate scrie ca polinom în* $s_1, \ldots, s_m$, *de pondere* $\leqslant n$.

Demonstrație (prin inducție completă asupra numărului m al variabilelor și asupra gradului n). Pentru $n = 1$ teorema este evidentă : $X_1 = s_1$. De asemenea, pentru $n = 0$, teorema este evidentă : orice polinom de gradul zero se reduce la termenul liber și poate fi privit atît ca polinom în $X_1, \ldots, X_m$ cît și ca polinom în $s_1, \ldots, s_m$ de pondere zero. Să presupunem că teorema este adevărată pentru polinoamele simetrice în $k \leqslant m - 1$ variabile și de asemenea pentru polinoamele în m variabile de grad cel mult $n - 1$; vom demonstra că în această ipoteză, teorema este adevărată pentru un polinom simetric în $X_1, \ldots, X_m$ de gradul n. Fie $f(X_1, \ldots, X_m)$ simetric și de gradul n. Să punem $X_m = 0$ în acest polinom : $f(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0)$ este un polinom simetric în $X_1, \ldots, X_{m-1}$ (orice permutare a variabilelor $X_1, \ldots, X_{m-1}$ se poate interpreta ca o permutare a variabilelor $X_1, \ldots, X_m$ care lasă pe loc variabila X_m).

Prin urmare, dacă punem

$$s'_1 = X_1 + \ldots + X_{m-1},$$

$$s'_2 = X_1 X_2 + \ldots + X_1 X_{m-1} + X_2 X_3 + \ldots + X_{m-2} X_{m-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$s'_{m-1} = X_1 X_2 \ldots X_{m-1},$$

putem scrie, în virtutea ipotezei de inducție,

$$f(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0) = g_1(s'_1, \ldots, s'_{m-1}),$$

g_1 fiind un polinom de pondere cel mult egală cu gradul lui $f(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0)$; prin urmare, cel mult egală cu n, gradul lui f.

Polinomul

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = f(X_1, \ldots, X_m) - g_1(s_1, \ldots, s_{m-1})$$

este simetric și are gradul $\leqslant n$. În plus, $f_1(X_1, \ldots, X_{m-1}, 0) = 0$. Această egalitate arată că $f_1(X_1, \ldots, X_m)$ este divizibil cu $X_m - 0 = X_m$, adică putem scrie

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = X_m f'_1(X_1, \ldots, X_{m-1}, X_m).$$

Din cauza simetriei lui f_1 rezultă, făcînd în această egalitate, transpoziţia (X_{m-1}, X_m), de exemplu,

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = X_{m-1} f_1'(X_1, \ldots, X_m, X_{m-1});$$

prin urmare,

$$X_m f_1'(X_1, \ldots, X_{m-2}, 0, X_m) = f_1(X_1, \ldots, X_{m-2}, 0, X_m) = 0;$$

$$f_1'(X_1, \ldots, X_{m-2}, 0, X_m) = 0.$$

Aceasta înseamnă că $f_1'(X_1, \ldots, X_m)$ este divizibil cu X_{m-1}:

$$f_1'(X_1, \ldots, X_m) = X_{m-1} f_1''(X_1, \ldots, X_m).$$

Aşadar

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = X_m X_{m-1} f_1''(X_1, \ldots, X_m).$$

În acelaşi mod se constată că $f_1''(X_1, \ldots, X_m)$ este divizibil cu X_{m-2}; că polinomul $\dfrac{f_1''(X_1, \ldots, X_m)}{X_{m-2}}$ este divizibil cu X_{m-3} etc.; în sfîrşit că

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = X_1 X_2 \ldots X_m f_2(X_1, \ldots, X_m).$$

Astfel putem scrie

$$f_1(X_1, \ldots, X_m) = s_m f_2(X_1, \ldots, X_m).$$

Polinomul f_2 este de grad cel mult $n - m < n$; prin urmare, tot în baza ipotezei de inducţie, există un polinom $g_2(s_1, \ldots, s_m)$, de pondere $p \leqslant n - m$, astfel încît să putem scrie

$$f_2(X_1, \ldots, X_m) = g_2(s_1, \ldots, s_m).$$

Avem, prin urmare,

$$f(X_1, \ldots, X_m) = g_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) + s_m g_2(s_1, \ldots, s_m);$$

ponderea lui g_1 fiind cel mult n şi a lui $s_m g_2(s_1, \ldots, s_m)$ fiind $m + p \leqslant m + (n - m) = n$. Teorema este demonstrată.

Exemplu. Polinomul $f = X_1^5 + X_2^5$ se poate scrie ca un polinom în $s_1 = X_1 + X_2$ şi $s_2 = X_1 X_2$.

Avem $f(X_1, 0) = X_1^5 = s_1^5$.

Considerăm polinomul

$$f(X_1, X_2) - s_1^5 = X_1^5 + X_2^5 - (X_1 + X_2)^5 = -\frac{5!}{4!} X_1X_2(X_1^3 + X_2^3) -$$

$$-\frac{5}{3!2!} X_1^2X_2^2(X_1 + X_2) = -s_2\,[5(s_1^3 - 3s_2s_1) + 10\,s_2s_1] =$$

$$= -s_2[5(s_1^3 - s_2s_1)] = 5s_1s_2(s_2 - s_1^2).$$

Astfel

$$X_1^5 + X_2^5 = s_1^5 + 5s_1s_2(s_2 - s_1^2).$$

Se poate arăta că *reprezentarea unui polinom simetric în* $X_1, \ldots, X_m$, *ca polinom în* $s_1, \ldots, s_m$, *este unică.*

Este destul să demonstrăm

Teoremă. *Dacă* $X_1, \ldots, X_m$ *sînt algebric independente peste* K, *atunci* $s_1, \ldots, s_m$ *sînt şi ele algebric independente peste* K.

În acest scop, se procedează prin inducţie completă asupra numărului m. Pentru $m=1$, afirmaţia este evidentă : în acest caz $X_1 = s_1$; deci, dacă X_1 este algebric independentă, adică transcendentă peste K, s_1 are aceeaşi proprietate. Să presupunem afirmaţia adevărată pentru $m-1$ variabile şi să presupunem că $s_1, \ldots, s_m$ sînt algebric dependente peste K. Aceasta înseamnă că există un polinom $f \in K\,[Y_1, \ldots, Y_m]$, diferit de zero, astfel încît $f(s_1, s_2, \ldots, s_m) = 0$.

Să scriem polinomul f ordonat după puterile lui Y_m :

$$f(Y_1, \ldots, Y_m) = f_0(Y_1, \ldots, Y_{m-1}) + Y_m f_1(Y_1, \ldots, Y_{m-1}) +$$

$$\ldots + Y_1^g f_g(Y_1, \ldots, Y_{m-1}).$$

Putem presupune că $f_0(Y_1, \ldots, Y_{m-1})$ este diferit de polinomul zero ; altfel am avea $f(Y_1, \ldots, Y_m) = Y_m\, h(Y_1, \ldots, Y_m)$ şi, din $f(s_1, \ldots, s_m) = 0$, ar rezulta $h(s_1, \ldots, s_m) = 0$ şi am face raţionamentul asupra lui h.

Aşadar, avem

$$0 = f_0(s_1, \ldots, s_{m-1}) + s_m f_1(s_1, \ldots, s_{m-1}) + \ldots + s_m^g f_g(s_1, \ldots, s_{m-1}).$$

Dacă înlocuim pe $s_1, \ldots, s_m$ cu expresiile lor în $X_1, \ldots, X_m$, această egalitate trebuie să fie o identitate în $X_1, \ldots, X_m$. Să facem în această identitate pe $X_m = 0$, rezultă $s_m = 0$, s_1 devine s_1' ; s_2 devine s_2' etc.

Deci vom avea $f_0(s_1', \ldots, s_{m-1}') = 0$, $f_0(Y_1, \ldots, Y_{m-1}) \neq 0$; aceasta este în contradicţie cu ipoteza de inducţie, care afirmă că în $m-1$ variabile, $s_1', \ldots, s_{m-1}'$ sînt algebric independente.

Astfel dacă teorema este adevărată în $m - 1$ variabile, rezultă că ea este adevărată și în m variabile.

9.7.5.2. *Exerciții*

1. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $x^3 + px + q$.

a) Să se exprime ca funcție de p și q

$$F = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$$

și

$$G = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

b) Să se arate că, pentru orice număr natural impar n, suma

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n$$

este divizibilă cu q.

Indicație. Punînd $f_m(X_1, X_2, X_3) = X_1^m + X_2^m + X_3^m$, se procedează ca în demonstrația teoremei fundamentale:

$$f_n(X_1, X_2, 0) = X_1^n + X_2^n = s_1' - ns_2' f_{n-2}(X_1, X_2, 0) - \frac{n!}{(n-2)!2!} s_2'^2 f_{n-4}(X_1, X_2, 0) - \ldots$$

Punînd apoi $F_n(X_1, X_2, X_3) = f_n(X_1, X_2, X_3) - [s_1^n - n s_2 f_{n-2}(X_1, X_2, X_3) - \frac{n!}{(n-2)!2!} s_2^2 f_{n-4}(X_1, X_2, X_2) - \ldots]$, deducem ca în teoremă, că F_n este divizibil cu X_3, deci din cauza simetriei, cu $X_1X_2X_3$:

$$F_n(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2X_3 g(s_1, s_2, s_3).$$

Punînd acum $X_i = x_i$, găsim $f_n(x_1, x_2, x_3) = qg(0, p, q) + npf_{n-2}(x_1, x_2, x_3) + \frac{n!}{(n-2)!2!} p^2 f_{n-4}(x_1, x_2, x_3) + \ldots$

Se procedează apoi prin inducție asupra exponentului n.

2. Să se arate că $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$ este divizibil cu $X + Y + Z$.

3. Să se arate că polinomul

$$X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3 - 3(X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4)$$

este divizibil cu $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Indicație. Se va exprima polinomul dat cu ajutorul funcțiilor simetrice elementare s_1, s_2, s_3; s_1 apare în factor.

4. Să se arate că polinomul omogen

$$2(X^4 + Y^4 + Z^4) - (X^2 + Y^2 + Z^2)^2 -$$
$$- (X + Y + Z)^2(X^2 + Y^2 + Z^2) + (X + Y + Z)^4$$

este divizibil cu $X(X + Y + Z)$.

Indicație. Se aplică teorema fundamentală; se va observa că $s_1 s_3$ apare în factor. Se poate aplica și criteriul de divizibilitate cu $X-a$ (v.9.7.3).

5. Să se calculeze valoarea funcției simetrice

$$X_1^3 X_2^2 + X_1^3 X_3^2 + X_2^3 X_1^2 + X_2^3 X_3^2 + X_3^3 X_1^2 + X_3^3 X_2^2$$

pentru sistemul $\{x_1, x_2, x_3\}$ format de rădăcinile polinomului $X^3 - 5X + 1$.

9.8. Rădăcini comune

9.8.1. Fie $f(X)$ și $g(X)$ două polinoame din $K[X]$. C.m.m.d.c al polinoamelor f și g este un polinom $d(X) \in K[X]$ care se poate scrie sub forma

$$d(X) = a(X) f(X) + b(X) g(X), \tag{9.3}$$

cu $a(X)$ și $b(X)$ polinoame din $K[X]$. Dacă polinoamele f și g au o rădăcină comună α, atunci din identitatea (9.3) rezultă că $D(\alpha) = 0$. Prin urmare, în acest caz $D(X)$ este un polinom de grad pozitiv, nu este o constantă. Aceasta rezultă și din faptul că f și g fiind divizibile cu $X - \alpha$, $D(X)$ se divide cu $X - \alpha$, deci gradul lui $D(X)$ este diferit de zero. Reciproc, rădăcinile lui $D(X)$ sînt rădăcini comune ale lui f și g, după cum rezultă din faptul că putem scrie $f(X) = D(X)\bar{f}(X)$, $g(X) = D(X)\bar{g}(X)$, cu $\bar{f}(X)$ și $\bar{g}(X)$ polinoame convenabile. În rezumat avem următoarea

Teoremă. *Rădăcinile comune a două polinoame f și g sînt și rădăcini ale c.m.m.d.c. al acestor polinoame.*

Această proprietate importantă a rădăcinilor comune reduce calculul lor la calculul rădăcinilor unui polinom de grad mai mic, $D(X)$, care se deduce din f și g prin operații de adunare și înmulțire în $K[X]$.

9.8.2. Să presupunem că polinomul $g(X)$ este ireductibil în $K[X]$ și că $f(X)$ și $g(X)$ au o rădăcină comună. În acest caz $D(X)$ coincide cu $g(X)$, în afară de un factor din K, pentru că gradul lui $D(X)$ este diferit de zero și $g(X)$ nu are alți factori de grad pozitiv, în afară de el însuși. Prin urmare, $g(X)$, fiind egal cu $D(f, g)$, divide polinomul $f(X)$. Astfel, teorema precedentă are următorul

Corolar. *Dacă $g(X)$ este ireductibil în $K[X]$ și polinoamele $f(X)$ și $g(X)$ au o rădăcină comună, toate rădăcinile lui $g(X)$ anulează și polinomul $f(X)$.*

Să considerăm în particular inelul $Q[X]$ al polinoamelor cu coeficienți raționali și un polinom $f(X)$ din $Q[X]$, care admite o rădăcină de forma $a + \sqrt{b}$, b nefiind pătratul unui număr rațional. Numerele $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$ sînt rădăcinile conjugate ale polinomului de gradul al doilea $g(X) = X^2 - 2aX + a^2 - b^2$ din $Q[X]$. Polinomul $g(X)$ este ireductibil în $Q[X]$ pentru că singurii factori de grad diferit de 0 și 2, pe care-i admite, sînt $X - a - \sqrt{b}$, $X - a + \sqrt{b}$ (din cauza unicității descompunerii în factori primi, și aceștia nu sînt în $Q[X]$.

Conform corolarului precedent, polinomul $f(X)$ admite ca rădăcină și numărul $a - \sqrt{b}$, cealaltă rădăcină a lui $g(X)$.

Astfel, rezultă demonstrată următoarea

Propoziție. *Orice polinom $f(X)$ cu coeficienți raționali, care admite o rădăcină de forma $a + \sqrt{b}$, cu a,b raționali și $\sqrt{b}$ irațional, admite ca rădăcină și numărul conjugat $a - \sqrt{b}$.*

Să considerăm de asemenea inelul $R[X]$ al polinoamelor cu coeficienți reali și un polinom $f(X) \in R[X]$, care admite o rădăcină complexă de forma $a + bi$.

Numerele complexe $a + bi$ și $a - bi$ sînt rădăcini conjugate ale polinomului de gradul doi $g(X) = X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ din $R[X]$. Acest polinom este ireductibil în $R[X]$, pentru că singurii săi factori proprii sînt polinoamele $X - a - bi$, $X - a + bi$ și acestea nu sînt în $R[X]$.

Prin urmare, $f(X)$ admite ca rădăcină și numărul $a - bi$, cea de a doua rădăcină a lui $g(X)$. Astfel rezultă demonstrată și următoarea

Teoremă. *Orice polinom cu coeficienți reali care are o rădăcină complexă $a + bi$, admite și numărul conjugat $a - bi$ ca rădăcină.*

Corolar. *Orice polinom cu coeficienți reali se descompune în $R[X]$ în factori de grad cel mult doi.* Altfel spus : în $R[X]$ nu există polinoame ireductibile de grad mai mare decît doi, pentru că orice polinom $f \in R[X]$ se descompune în factori liniari, în $C[X]$, corespunzători rădăcinilor lui f; factorii corespunzători rădăcinilor reale sînt divizori de gradul unu în $R[X]$ ai polinomului f; factorii corespunzători la rădăcini complexe se grupează în perechi de forma $(X-a-bi)(X-a+bi) = g(x) \in R[X]$. Astfel divizorii ireductibili ai lui f sînt de gradul unu sau doi, cel mult.

9.8.2. Exerciţii

1. Să se cerceteze dacă polinoamele $P = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 9X + 6$ şi $Q = X^3 - 8X^2 + 17X - 10$ au rădăcini comune.

2. Ce condiţie trebuie să îndeplinească polinoamele $f = ax^2 + bx + c$ şi $g = px^2 + qx + r$ pentru ca să aibă o rădăcină comună?

Răspunsul la această întrebare se poate da în diferite moduri:

a) Putem, de exemplu, raţiona astfel: dacă polinoamele f şi g au o rădăcină x în comun, atunci sistemul de ecuaţii liniare şi omogene

$$\begin{aligned} aX + bY + cZ &= 0, \\ pX + qY + rZ &= 0 \end{aligned} \tag{0}$$

admite soluţia $(x^2, x, 1)$; prin urmare, putem scrie

$$\frac{x^2}{br - cq} = \frac{x}{cp - ar} = \frac{1}{aq - bp}. \tag{1}$$

Cum x este medie proporţională între x^2 şi 1, adică pătratul său este egal cu produsul dintre x^2 şi 1, rezultă că şi numitorii satisfac, în acest caz (de existenţă a unei rădăcini comune), relaţia

$$(cp - ar)^2 - (br - cq)(aq - bp) = 0. \tag{2}$$

Aceasta este condiţia necesară ca f şi g să aibă o rădăcină în comun.

b) Se poate raţiona şi în modul următor: dacă f şi g au o rădăcină în comun, atunci aceea trebuie să anuleze polinomul

$$ag - pf = (aq - bq)\,x + ar - pc.$$

De asemenea, rădăcina comună trebuie să anuleze şi polinomul

$$rf - cg = (ar - pc)x^2 + (br - cq)x,$$

adică polinomul

$$(ar - pc)x + aq - br$$

(trebuie să fie $x \neq 0$, căci presupunem $c \neq 0$, $r \neq 0$). Astfel dacă f şi g au o rădăcină x comună, trebuie să avem

$$x = \frac{cp - ar}{aq - bp} = \frac{br - cq}{cp - ar},$$

de unde rezultă condiţia (2).

c) În sfîrşit, la acelaşi rezultat ajungem aplicînd algoritmul lui Euclid polinoamelor f şi g şi scriind că ele au un divizor comun (de gradul unu); propunem verificarea ca exerciţiu.

3. Să se arate că dacă polinoamele f şi g îndeplinesc condiţia (2), atunci ele au o rădăcină comună (condiţia 2 este necesară şi suficientă pentru existenţa unei rădăcini comune pentru f şi g).

R. Dacă este îndeplinită condiția (2) și dacă $aq - bp \neq 0$, atunci $x = \dfrac{cp - ar}{aq - bp}$, dedus din a doua ecuație (1), anulează polinoamele f și g. Într-adevăr, avem

$$(aq - bp)^2 f\left(\frac{cp - ar}{aq - bp}\right) = a(cp - ar)^2 + b(cp - ar)(aq - bp) +$$

$$+ c(aq - bp)^2 = a(br - cq)(aq - bp) + b(cp - ar)(aq - bp) +$$

$$+ c(aq - bp)^2 = (aq - bp)\,[a(br - cq) + b(cp - ar) + c(aq - bp)] = 0$$

(termenii din paranteza dreaptă se reduc doi cîte doi). La același rezultat se poate ajunge observînd că, deoarece $aq - bp \neq 0$, există o soluție $(u, v, 1)$ a lui (0) dată de

$$\frac{u}{br - cq} = \frac{v}{cp - ar} = \frac{1}{aq - bp}.$$

Condiția (2) arată că $(u, v, 1)$ satisface în plus relația $v^2 = u$, ceea ce dovedește că $x = v$ este rădăcina comună a polinoamelor f și g.

Dacă $aq - bp = 0$, atunci $\dfrac{p}{a} = \dfrac{q}{b}$ și din (2) obținem $cp - ar = 0$, adică $\dfrac{p}{a} = \dfrac{r}{c}$.

Prin urmare $f = kg$ cu $k = \dfrac{p}{a}$. Deci orice rădăcină a lui g este și rădăcină a lui f.

4. Polinoamele

$$X^4 + pX^2 + qX + 1 \text{ și } X^4 + p'X^2 + q'X + 1$$

sînt egale, dacă au două rădăcini egale.

Indicație. Se va observa că diferența lor are trei rădăcini și este de gradul doi, deci trebuie să fie zero.

9.9. Rădăcini multiple

9.9.1. Fie α o rădăcină a polinomului $f(X) \in C[X]$. Există un polinom $g(X) \in C[X]$, astfel încît să putem scrie

$$f(X) = (X - \alpha)\, g\,(x).$$

Dacă $g(\alpha) = 0$, atunci putem scrie

$$g(X) = (X - \alpha)\, h\,(X)$$

și, prin urmare,

$$f(X) = (X - \alpha)^2\, h(X).$$

În acest caz se spune că α este rădăcina multiplă a lui $f(X)$. În mod precis, dacă există un întreg m și un polinom $p(X)$, astfel încît să putem scrie

$$f(X) = (X - \alpha)^m\, p\,(X), \tag{9.4}$$

cu $p(\alpha) \neq 0$, se zice că α este rădăcină multiplă de ordinul m a polinomului $f(X)$ sau că m este *ordinul de multiplicitate* a rădăcinii α. Dacă $m = 1$, se spune că α este rădăcină *simplă* a lui $f(X)$.

Rădăcinile multiple ale unui polinom se pot *separa* de celelalte rădăcini cu ajutorul derivatei, în modul următor.

Să presupunem că α este rădăcină multiplă de ordinul m a polinomului $f(X)$; înseamnă că putem scrie

$$f(X) = (X - \alpha)^m g(X) \text{ cu } g(\alpha) \neq 0.$$

Să presupunem că $f(X)$ este un polinom cu coeficienți reali și că α este un număr real.

În acest caz, putem considera polinomul derivat (derivata) lui $f(X)$:

$$f'(X) = m(X - \alpha)^{m-1} g(X) + (X - \alpha)^m g'(X) =$$

$$= (X - \alpha)^{m-1}[mg(X) + (X - \alpha) g'(X)].$$

Din cauză că $g(\alpha) \neq 0$, avem

$$mg(\alpha) + 0 \cdot g'(\alpha) = mg(\alpha) \neq 0.$$

Relația este, în particular, valabilă și pentru cazul $m = 1$. În acest caz

$$f'(\alpha) \neq 0.$$

În concluzie, *rădăcinile multiple ale unui polinom $f(X)$ sînt și rădăcini ale derivatei $f'(X)$; dacă α este rădăcină multiplă de ordinul m a lui $f(X)$, α figurează cu ordinul de multiplicitate $m-1$ printre rădăcinile lui $f'(X)$; rădăcinile simple ale lui $f(X)$ nu sînt rădăcini ale polinomului $f'(X)$.*

Prin urmare, rădăcinile multiple ale unui polinom $f(X)$ sînt chiar rădăcinile comune ale polinoamelor $f(X)$ și $f'(X)$.

Rezultă că rădăcinile multiple ale polinomului $f(X)$ sînt exact rădăcinile celui mai mare divizor comun al polinoamelor $f(X)$ și $f'(X)$.

Exemple. Fie $f(X) = X^5 + 3X^4 - 4X^3 - 12X^2 + 4X + 12$. Se întreabă dacă f are rădăcini multiple.

Pentru a răspunde la această întrebare, considerăm derivata

$$f'(X) = 5X^4 + 12X^3 - 12X^2 - 24X + 4$$

și căutăm c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(X)$ și $f'(X)$, spre exemplu, cu algoritmul lui Euclid

(considerăm în locul lui $f(X)$ polinomul $25\,f(X)$, pentru a calcula cu coeficienţi întregi; aceasta nu schimbă c.m.m.d.c.):

$$\begin{array}{r|l}
25X^5+75X^4-100X^3-300X^2+100X+300 & 5X^2+12X^3-12X^2-24X+4 \\
\underline{-25X^5-60X^4+60X^3+120X^2-20X} & 5X+3 \\
15X^4-40X^3-180X^2+80X+300 & \\
\underline{-15X^4-36X^3+36X^2+72X-12} & \\
-76X^3-144X^2+152X+288 = -4(19X^3+36X^2-38X-72). &
\end{array}$$

Lăsăm la o parte factorul -4 din acest rest şi înmulţim pe $f'(X)$ cu 19^2, continuînd algoritmul:

$$\begin{array}{r|l}
1805X^4+4332X^3-4332X^2-8664X+1444 & 19X^3+36X^2-38X-72 \\
\underline{-1805X^4-3420X^3+3610X^2+6840X} & 95X+48 \\
912X^3-722X^2-1824X+1444 & \\
\underline{-912X^3-1728X^2+1824X+3456} & \\
-2450X^2+4900 = -2450(X^2-2). &
\end{array}$$

Lăsînd la o parte factorul -2450, obţinem

$$\begin{array}{r|l}
19X^3+36X^2-38X-72 & X^2-2 \\
\underline{-19X^3+38X} & 19X-36 \\
36X^2-72 & \\
\underline{-36X^2+72} & \\
0 &
\end{array}$$

Aşa dar, c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(X)$ şi $f'(X)$ este X^2-2, ceea ce înseamnă că rădăcinile acestuia sînt rădăcinile multiple ale lui $f(X)$ şi anume ordinul lor de multiplicitate este doi, pentru că sînt rădăcini simple ale lui c.m.m.d.c., deci şi ale polinomului $f'(X)$. (Să se scrie $f(X)$ ca produs de factori).

În general, orice rădăcină multiplă de ordinl m a lui $f(X)$ este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru $f'(X)$ şi tot de ordinul $m-1$ pentru c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(X)$ şi $f'(X)$.

Aceasta înseamnă că, împărţind polinomul $f(X)$ la c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(X)$ şi $f'(X)$, găsim un polinom care are aceleaşi rădăcini ca şi $f(X)$, însă cu ordinul unu de multiplicitate.

Acest fapt este util cîteodată, în special pentru calculul numeric al rădăcinilor unui polinom.

9.9.2. Am considerat polinoame cu coeficienţi reali, pentru a folosi teoria derivării, care a fost studiată la analiză pentru funcţii reale. Dar noţiunea de derivată se poate extinde la inele arbitrare.

Fie A un inel (comutativ); se numeşte *derivată* a inelului A, în el însuşi, orice aplicaţie

$$D : A \to A$$

care îndeplinește condițiile

$$D(x + y) = D(x) + D(y) \tag{9.5}$$

și

$$D(xy) = xD(y) + D(x)y, \tag{9.6}$$

pentru orice x și y din A.

În această definiție sînt luate ca axiome proprietățile esențiale ale derivatei din analiză, definită acolo, prin operații de trecere la limită.

Din definiție rezultă că $D(1) = 0$ [este destul să punem în (9.6) $x = y = 1$].

De asemenea, din (9.6) rezultă că $D(x^2) = 2x\,D(X)$. Prin inducție completă asupra lui n, deducem

$$D(x^n) = nx^{n-1}\,D(x). \tag{9.7}$$

Într-adevăr, formula este adevărată pentru $n = 1$; presupunînd-o adevărată pentru toate puterile pînă la n, deducem, aplicînd formula (9.6),

$$D(x^{n+1}) = D(x^n x) = D(x^n)\,x + x^n\,D(x) =$$

$$= nx^{n-1}D(x)\,x + x^n\,D(x) = nx^n\,D(x) + x^nD(x) =$$

$$= (n + 1)\,x^n\,D(x).$$

Astfel formula (9.7) este valabilă pentru orice exponent n.

Exemplu. Să considerăm drept inel A inelul funcțiilor polinomiale $R[x]$ de o variabilă x, peste corpul numerelor reale, adică al polinoamelor din analiză. Orice element u din acest inel este un polinom în x:

$$u = u_0 + u_1x + \ldots + u_n x^n.$$

Să punem

$$D(u) = u_1 + 2u_2x + \ldots + nu_nx^{n-1}.$$

Se verifică îndată că funcția $D : R[X] \to R[X]$ îndeplinește condițiile (9.5) și (9.6) ale definiției, deci este o derivare.

Mai general, are loc următoarea

Teoremă. *În orice inel de polinoame $K[X]$, cu coeficienți într-un corp comutativ K, există o derivare* D *și numai una singură care duce elementele lui $K[X]$ în zero și polinomul X într-un polinom dat $u \in K[X]$.*

Demonstrație. Să presupunem că o astfel de derivare D′ există. Trebuie să avem $D'(a) = 0$ pentru orice $a \in K$, $D'(X^m) = mX^{m-1} D'(X) = mX^{m-1} u$ și $D'(aX^m) = D'(a) X^m + maX^{m-1} D'(X) = 0 \cdot X^m + maX^{m-1} u = maX^{m-1} u$.

Prin urmare, pentru orice polinom

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m,$$

trebuie să avem, conform definiției,

$$D'(f(X)) = a_1 u + 2a_2 Xu + \ldots + ma_m X^{m-1} u.$$

Aceasta arată că dacă există o derivare D′ care să îndeplinească condițiile din enunțul teoremei, aceea este *unică*: trebuie să ducă orice polinom $f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m$ în polinomul $(a_1 + 2a_2 X + \ldots + ma_m X^{m-1})u = f'(X)\, u$ (notăm ca și în analiză, cu $f'(X)$ polinomul $a_1 + 2a_2 X + \ldots + ma_m X^{m-1}$).

Rămîne să mai arătăm că aplicația $D : K[X] \to K[X]$ definită prin formula $Df(X) = f'(X) u$ este o derivare.

Dar avem

$$D(f(X) + g(X)) = (f(X) + g(X))' u = (f'(X) + g'(X)) u =$$
$$= f'(X) u + g'(X) u = D(f(X)) + D(g(X))$$

și

$$D(fg) = (fg')u = f'g\, u + fg'u =$$
$$= (f'u) g + f(g'u) = D(f)g + fD(g).$$

Prin urmare, D este o derivare și este singura derivare care îndeplinește condițiile teoremei.

Vom considera derivarea D pentru care $D(X) = 1$. Aceasta ne ajută să repetăm cuvînt cu cuvînt considerațiile relative la separarea rădăcinilor multiple, făcute în inelul $R[X]$, pentru un inel $K[X]$, de polinoame cu coeficienți într-un corp oarecare K (în particular în corpul numerelor complexe).

9.9.3. Cu ajutorul derivatelor succesive ale polinomului $f(X)$ se poate determina ordinul de multiplicitate al unei rădăcini a acestui polinom. Aceasta rezultă din observația că dacă α este rădăcină multiplă de ordinul m pentru $f(X)$, ea este rădăcină multiplă de ordinul $m-1$ pentru $f'(X)$, de ordinul $m-2$ pentru $f''(X)$, ..., de ordinul 1 pentru $f^{m-1}(X)$ și $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.

Prin urmare, *ordinul de multiplicitate al unei rădăcini α a polinomului f este cel mai mic număr m pentru care $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$.*

Astfel în exemplul precedent $\sqrt{2}$ este rădăcina multiplă a polinomului $f(X) = X^5 + 3X^4 - 4X^3 - 12X^2 + 4X + 12$, pentru că anulează și polinomul $f'(X)$. Dar $\sqrt{2}$ nu anulează polinomul

$$f''(X) = 20X^3 + 36X^2 - 24X - 24 ;$$

$$f''(\sqrt{2}) = 48 + 16\sqrt{2} \neq 0 ;$$

$\sqrt{2}$ este rădăcină dublă.

9.9.4. *Dezvoltarea unui polinom după puterile lui $x-a$. Formula lui Taylor.* Fie $f(x)$ o funcție polinomială de gradul n definită peste un corp K și a un element din K. Să considerăm șirul de polinoame

$$\begin{aligned}
&f(x) = (x-a)\,g_1(x) + r_0, && \operatorname{gr} g_1(x) = n-1,\\
&g_1(x) = (x-a)g_2(x) + r_1, && \operatorname{gr} g_2(x) = n-2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots && \ldots\ldots\ldots\\
&g_{n-2}(x) = (x-a)\,g_{n-1}(x) + r_{n-2}, && \operatorname{gr} g_{n-2}(x) = 2,\\
&g_{n-1}(x) = (x-a)\;a_0 + r_{n-1}, && \operatorname{gr} g_{n-1}(x) = 1,
\end{aligned} \tag{9.8}$$

în care $g_1(x)$ este cîtul împărțirii prin $x-a$ a polinomului $f(x)$, $g_2(x)$ cîtul împărțirii prin $(x-a)$ a lui $g_1(x)$ etc., iar $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ sînt resturile acestor împărțiri.

Observăm acum că eliminînd pe $g_1(x)$ din primele două ecuații din șir, obținem

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x-a)^2 g_2(x) + (x-a)\,r_1 + r_0 =\\
&= r_0 + r_1\,(x-a) + g_2(x)\,(x-a)^2.
\end{aligned}$$

Din această ecuație și din ecuația a treia din șir, putem elimina pe $g_2(x)$, găsind

$$f(x) = r_0 + r_1(x-a) + r_2(x-a)^2 + g_3(x)(x-a)^3.$$

Urmînd mai departe acest procedeu de eliminare, obținem pentru $f(x)$ următoarea identitate:

$$f(x) = r_0 + r_1(x-a) + r_2(x-a)^2 + \ldots + r_{n-1}(x-a)^{n-1} + a_0(x-a)^n. \tag{9.9}$$

Aceasta se numește dezvoltarea funcției polinomiale $f(x)$ după puterile lui $x-a$. Coeficienții $r_0, r_1, r_2, \ldots$ se calculează ușor din (9.9), după schema lui Horner.

Primul rest r_0 este egal cu $f(a)$. Resturile r_1, r_2 sînt legate de valorile derivatelor lui $f(x)$ pentru $x = a$. Pentru a preciza această legătură, să considerăm derivata, în dreapta şi în stînga semnului de egalitate din (9.9); vom găsi polinoame egale

$$f'(x) = r_1 + 2r_2\ (x-a) + \ldots + n a_0 (x-a)^{n-1}, \qquad (9.9')$$

pentru că derivarea este un endomorfism al grupului aditiv $K[X]$, care duce pe 0 în 0 şi, prin urmare, polinoame egale în polinoame egale.

Înlocuind pe x cu a în identitatea (9.9'), avem

$$f'(a) = r_1.$$

De asemenea din (9.9'), prin derivare, deducem

$$f''(x) = 2r_2 + 3\cdot 2\, r_3 (x-a) + \ldots + n(n-1)\, a_0\, (x-a)^{n-2} \qquad (9.9'')$$

şi de aici, punînd $x = a$, obţinem

$$f''(a) = 2r_2.$$

Urmînd mai departe acest procedeu, găsim în general

$$f^{(k)}(a) = k!\, r_k;$$

în particular

$$f^{(n)}(a) = n!\, a_0.$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, identitatea (9.9) se poate scrie sub forma

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (9.10)$$

Aceasta este formula lui Taylor pentru funcţiile polinomiale de o singură variabilă.

Exemplu. Fie $f(x) = x^4 - 3x^3 + (x-2)$; să scriem dezvoltarea acestui polinom după puterile lui $x - 3$.

Coeficienţii r_0, r_1, r_2, r_3, a_0 se calculează după schema lui Horner

	1	−3	0	1	−2	
3	1	0	0	1	1	$g_1(x) = x^3 + 1$, $r_0 = 1$,
3	1	3	9	28		$g_2(x) = x^2 + 3x + 9$, $r_1 = 28$,
3	1	6	27			$g_3(x) = x + 6$, $r_2 = 27$,
3	1	9				$g_4(x) = 1 = a_0$, $r_3 = 9$.

Prin urmare,

$$f(x) = 1 + 28\,(x-3) + 27\,(x-3)^2 + 9\,(x-3)^3.$$

Coeficienții r_0, r_1, r_2 și r_3 se pot calcula și ca valori ale polinoamelor $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ pentru $x = 3$ (să se execute calculul!).

Formula lui Taylor este utilă în multe probleme, în legătură cu funcțiile polinomiale. Astfel, pe această formulă se vede direct că a este rădăcină multiplă de ordinul n pentru polinomul $f(x)$, dacă și numai dacă $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ și $f^{(n)}(a) \neq 0$. Într-adevăr, dacă $f(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ și $f^{(n)}(a) \neq 0$, atunci dezvoltarea polinomului $f(x)$ după puterile lui $x - a$ se prezintă astfel:

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \ldots =$$

$$= (x-a)^n \left[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a) + \ldots\right].$$

Din această dezvoltare se vede că factorul din paranteză este diferit de zero pentru $x = a$ și, prin urmare, a este pentru $f(x)$ o rădăcină de ordinul n (nici mai mare, nici mai mic).

Reciproc, dacă $f(x) = (x-a)^n g(x)$ și $g(a) \neq 0$, atunci $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$ și $f^{(n)}(a) = n!\, g(a) \neq 0$.

9.8.5. Exerciții

1. Să se scrie explicit condiția pe care trebuie să o îndeplinească p și q pentru ca polinomul $X^2 + pX + q$ să aibă o rădăcină dublă; care este rădăcina în acest caz?

2. Aceeași problemă pentru polinomul

$$f = X^3 + pX + q.$$

Indicație. Se va căuta c.m.m.d.c. al polinomului f și al derivatei; se va pune condiția ca aceasta să fie de gradul 1; se va găsi $4p^3 + 27q^2 = 0$; rădăcina dublă este $-\frac{3q}{2p}$.

3. Să se scrie explicit condiția pe care trebuie să o îndeplinească a, b, c, pentru ca polinomul $X^4 + 4aX^2 + 6bX + c$ să aibă o rădăcină triplă. Să se găsească rădăcinile polinomului în acest caz.

Indicație. Se va scrie condiția ca polinomul derivat să aibă o rădăcină dublă (exemplul precedent).

4. Care dintre polinoamele

$$X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 7X^2 + 8X - 3,$$

$$X^6 - 2X^5 - 8X^4 + 14X^3 + 11X^2 - 28X + 12,$$

$$X^3 - X - \frac{2}{3\,|\,\overline{3}}$$

are rădăcini multiple? Să se descompună în factori aceste polinoame.

5. Să se dezvolte după puterile lui $X-1$ polinoamele

$$X^3 - X,\ X^4 - X,\ X^5.$$

Indicație. Se procedează ca în text (v.9.9.4), se calculează coeficienții dezvoltării cu ajutorul derivatelor $\frac{f^{(m)}(1)}{m!}$ sau se calculează puterile lui X după formula binomului $X^m = [(X-1)+1)]^m$ și se ordonează după puterile lui $X-1$.

6. Să se arate că pentru orice n natural polinomul

$$f = \frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + X + 1$$

are numai rădăcini simple.

R. Derivata lui f este polinomul $p' = \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + X + 1$.

Dacă f și f' au rădăcini comune, acelea trebuie să anuleze diferența $f - f' = \frac{X^n}{n!}$; prin urmare, f și f' nu pot avea în comun rădăcini diferite de 0; iar $f(0) = 1 \neq 0$.

7. Să se determine a și b astfel încît polinomul $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + aX + b$ să fie un pătrat perfect; care sînt în acest caz, rădăcinile polinomului dat?

§ 10. Funcții polinomiale reale

10.1. Funcțiile polinomiale reale sînt funcțiile definite de polinoame cu coeficienți reali. Studiul lor este înlesnit de cunoștințele generale de analiză în legătură cu proprietățile funcțiilor continue derivabile, cu noțiunea de valoare absolută a unui număr real, reprezentare grafică ș.a. Se știe că orice polinom (cu coeficienți reali) este o funcție continuă și derivabilă pe toată dreapta reală [7].

Din formula lui Taylor se poate deduce o formulă de aproximare a oricărui polinom, într-un interval (a, b) cu polinoame de grad mic, ceea ce în probleme de calcul este de mare folos. Astfel, fie $f(x)$ un polinom real dat şi a, b două numere reale. Conform formulei lui Taylor (9.10), putem scrie , punînd acolo $x = b$:

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(a) + \frac{(b - a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

Să considerăm polinoamele

$$F(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x)$$

şi

$$G(x) = F(x) - \frac{(b - x)^2}{(b - a)^2} F(a).$$

Avem $G(a) = 0$ şi $G(b) = F(b) = 0$. Conform teoremei lui Rolle, există cel puţin un punct c în intervalul (a, b), $(a<c<b)$, care anulează derivata $G'(x)$:

$$G'(c) = 0.$$

Să scriem acest fapt, folosind expresia lui $G(x)$:

$$F'(c) + 2 \frac{b - c}{(b - a)^2} F(a) = 0.$$

Deducem

$$F(a) = - \frac{(b - a)^2}{2(b - c)} F'(c).$$

Derivînd într-o parte şi în cealaltă a semnului de egalitate în formula de definiţie a polinomului $F(x)$ şi înlocuind apoi pe x cu c, găsim

$$F'(c) = - (b - c) f''(c).$$

Înlocuind pe $F'(c)$ cu această expresie în egalitatea de mai sus, avem

$$F(a) = \frac{(b - a)^2}{2} f''(c).$$

Pe de altă parte, înlocuind pe c cu a în formula de definiţie a lui $F(x)$, avem

$$F(a) = f(b) - f(a) - (b - a) f'(a).$$

Eliminînd pe $F(a)$ din ultimele două relaţii, obţinem

$$f(b) = f(a) + (b - a)\, f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c),$$

o formulă analogă cu formula creşterilor finite [7] şi care se numeşte formula creşterilor finite de ordinul al doilea.

Dacă punem $b = a + h$, putem scrie $c = a + \theta h$ cu $0 < \theta < 1$ şi putem scrie această formulă sub forma

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h). \tag{10.1}$$

Polinomul de gradul al doilea $f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c)$ are aceleaşi valori ca şi polinomul $f(x)$ pentru $x = a$ şi $x = b$ şi derivata sa, pentru $x = a$, este egală cu $f'(a)$.

Dacă, în locul polinoamelor $F(x)$ şi $G(x)$ am fi considerat polinoamele

$$F_r(x) = f(b) - f(x) - (b - x) f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \ldots -$$

$$- \frac{(b-x)^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(x),$$

$$G_r(x) = F_r(x) - \frac{(b-x)^r}{b-a} F(a),$$

am fi obţinut o formulă a creşterilor finite de ordinul r şi un polinom

$$f(a) + (x - a) f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^r}{r!} f^{(r)}(c),$$

care împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $r-1$ se comportă ca şi $f(x)$.

10.2. Întrucît rădăcinile oricărui polinom sînt în număr finit (cel mult egal cu gradul) şi sînt numere finite, rezultă că atît rădăcinile unui polinom real $f(X)$, cît şi rădăcinile derivatei sale $f'(X)$ sînt cuprinse într-un interval de lungime finită. În căutarea rădăcinilor unei funcţii polinomiale reale şi în alte probleme este necesar uneori să determinăm un interval cît mai restrîns, care să cuprindă rădăcinile polinomului $f'(x)$.

Capetele intervalului se numesc *margini* pentru mulțimea rădăcinilor polinomului; capătul din dreapta este un *majorant* al mulțimii rădăcinilor lui $f(x)$, iar cel din stînga un *minorant.*

Exemple. Fie

$$f(x) = 3x^5 + 4x^3 - 8x^2 - 10x - 20.$$

Putem scrie

$$f(x) = x^2\left[3x^3 + 4x - \left(8 + \frac{10}{x} + \frac{20}{x^2}\right)\right].$$

Se vede că paranteza dreaptă este pozitivă pentru $x = 2$:

$$3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 - \left(8 + \frac{10}{2} + \frac{20}{2^2}\right) = 32 - 18 > 0.$$

Observăm apoi că binomul $3x^3 + 4x$ este o funcție crescătoare pentru $x > 2$, iar expresia $8 + \frac{10}{x} + \frac{20}{x^2}$ este descrescătoare în acest interval; prin urmare, $f(x)$ este crescătoare pentru $x > 2$. Cum $f(2) > 0$, înseamnă că $f(x) > 0$ pentru $x > 2$; prin urmare, 2 este un majorant pentru rădăcinile acestui polinom.

Ca să găsim un minorant pentru rădăcinile lui $f(x)$, considerăm polinomul $f(-x) = -3x^3 - 8x^2 + 10x - 20$. Putem scrie $f(-x) = -x(3x^4 + 4x^2 + 8x - 10) - 20$. Pentru $x > 1$ paranteza este o funcție crescătoare, cu valori mai mari ca $3 \cdot 1^4 + 4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 - 10 = 5$. Prin urmare, pentru $x > 1$, $f(-x)$ este descrescătoare, cu valori mai mici decît $-1 \cdot 5 - 20 = -25$. Astfel pentru $x > 1$, adică pentru $-x < -1$, avem $f(-x) < -25$. Înlocuind pe $-x$ cu y, pentru $y < -1$ deducem $f(y) < -25 < 0$. Aceasta arată că -1 este un minorant pentru rădăcinile polinomului $f(x)$. În concluzie, rădăcinile lui $f(x)$ sînt cuprinse în intervalul $(-1, +2)$.

Există diferite criterii generale, destul de simple, pentru determinarea unui majorant pentru rădăcinile reale ale unui polinom. Unul dintre acestea este dat de următoarea

Teoremă: *Dacă A este cel mai mare dintre numerele $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$, atunci rădăcinile reale ale polinomului*

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

nu pot fi mai mari decît $1 + A$.

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $x > 0$ avem

$$f(x) \geqslant x^n - Ax^{n-1} - \ldots - Ax - A = x^n - A\frac{x^n - 1}{x - 1} =$$

$$= x^n\left(1 - \frac{A}{x - 1}\right) + \frac{A}{x - 1}.$$

Dacă $x > 1 + A$, avem $x - 1 > 0$, $1 > \frac{A}{x-1} > 0$,

$$1 - \frac{A}{x-1} > 0 \text{ ; prin urmare,}$$

$$f(x) \geqslant x^n \left(1 - \frac{A}{x-1}\right) + \frac{A}{x-1} > 0 .$$

Aceasta arată, că pentru $x > 1 + A$, $f(x)$ nu poate fi nul, c.c.t.d.

Vom scrie M în locul lui $1 + A$.

Pentru a arăta că $-M$ este un minorant pentru rădăcinile lui $f(x)$, să considerăm polinomul

$$f(-x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n .$$

Putem scrie

$$(-1)^n f(-x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n .$$

În polinomul $x - a_1 x + \ldots + (-1)^n a_n$, coeficienţii au aceleaşi valori absolute $|a_1|, \ldots, |a_n|$ ca şi în polinomul $f(x)$; prin urmare, dacă $x > M$, ceea ce este totuna cu $-x < -M$, are loc inegalitatea $(-1)^n f(-x) > 0$. Aceasta înseamnă că, dacă $f(x)$ este un polinom de grad par, $f(x) > 0$ în afara intervalului $(-M, +M)$ ca şi în cazul polinoamelor de gradul al doilea $x^2 + px + q$, care au valori pozitive în afara rădăcinilor. Dacă gradul polinomului $f(x)$ este impar, atunci $f(x) > 0$ pentru $x > M$ şi $f(x) < 0$ pentru $x < -M$.

Tot astfel putem găsi un interval $(-M', +M')$ care să cuprindă rădăcinile derivatei. Dar gradul derivatei este de paritate diferită faţă de gradul lui $f(x)$. Însemnînd cu n gradul lui $f(x)$, pentru $n = 2m$, graficul lui $f(x)$ este de forma ca în fig. 6, iar pentru $n = 2m + 1$, graficul lui $f(x)$ are forma din fig. 7.

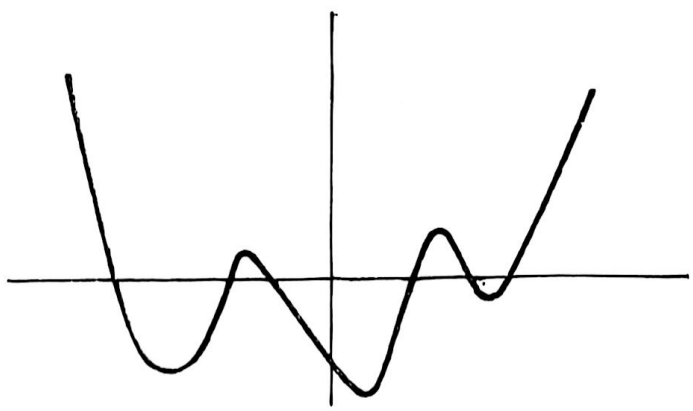


Fig. 6

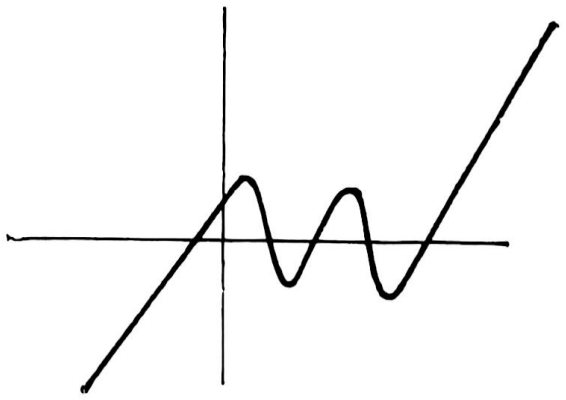


Fig. 7

Observăm că, în afara unui interval care cuprinde rădăcinile lui $f(x)$ şi rădăcinile lui $f'(x)$, graficul polinomului $f(x)$ se aseamănă mult cu graficul funcţiei x^n. Aceasta pentru că, în afara unui asemenea interval, suma $a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ este neglijabilă faţă de x^n, ceea ce se exprimă, în mod precis, prin relaţia

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{x^n} = 0 .$$

Teorema precedentă dă în general margini cam mari pentru rădăcinile unui polinom. De exemplu, pentru polinomul $x^5 - x^3 + 1\,000$, această teoremă dă $M = 1\,001$, din cauza coeficientului 1 000, care, fiind pozitiv, poate fi neglijat în căutarea unui majorant pentru rădăcini; este destul să ne asigurăm ca binomul $x^5 - x^3$ să fie pozitiv (sau mai mare ca $-1\,000$). Dar acest binom este pozitiv pentru orice valoare a lui x mai mare ca 1, astfel încît 1 este un majorant pentru rădăcinile polinomului considerat.

O margine mai strînsă, mai apropiată de rădăcini, este dată de procedeul lui Mac-Laurin, care se bazează pe următoarea

Teoremă. *Dacă primul coeficient negativ în polinomul*

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

este a_m, adică dacă $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1} \geqslant 0$ şi $a_m < 0$, atunci, considerînd numai acei coeficienţi ai polinomului $f(x)$, care sînt negativi, şi notînd cu A' cea mai mare dintre valorile lor absolute, obţinem $f(x) > 0$ pentru $x > 1 + \sqrt[m]{A'}$.

Demonstraţie. Într-adevăr, avem, pentru $x > 0$,

$$f(x) \geqslant x^n - A'(x^{n-m} + x^{n-m-1} + \ldots + x + 1) =$$

$$= x^n - A' \frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} = x^n - \frac{A'x^{n-m+1}}{x - 1} + \frac{A'}{x - 1} =$$

$$= x^{n-m+1} \frac{x^{m-1}(x - 1) - A'}{x - 1} + \frac{A'}{x - 1},$$

Pentru $x > 1$, avem $x > x - 1 > 0$; $x^{m-1}(x - 1) > (x - 1)^m$; prin urmare

$$x^{n-m+1} \frac{x^{m-1}(x - 1) - A'}{x - 1} > x^{n-m+1} \frac{(x - 1)^m - A'}{x - 1}.$$

Pentru $x > 1 + \sqrt[m]{A'}$, avem $(x-1)^m - A' > 0$, de unde rezultă $f(x) > x^{n-m+1}\dfrac{(x-1)^m - A'}{x-1} + \dfrac{A'}{x-1} > 0$, c.c.t.d.

Astfel, în cazul exemplului precedent, $A' = 1$ și teorema lui Mac-Laurin ne spune că 2 este un majorant pentru rădăcinile polinomului $x^5 - x^3 + 1\,000$. Observăm că dacă M este majorantul dedus din teorema lui Mac-Laurin, $-M$ nu este neapărat minorant pentru rădăcinile polinomului $f(x)$.

Exemplu. Pentru a calcula un minorant al rădăcinilor pentru polinomul $f(x) = x^5 - x^3 + 1000$, considerăm polinomul $f(-x) = -x^5 + x^3 + 1000$.

Teorema lui Mac-Laurin ne dă pentru polinomul $-f(-x) = x^5 - x^3 - 1000$ un majorant $M = 1\,000$; $-1\,000$ este un minorant dat de teorema lui Mac-Laurin pentru rădăcinile polinomului $f(x)$. Precum se vede, minorantul este diferit de -2.

Punînd $-f(-x) = x^3\left(x^2 - 1 - \dfrac{1\,000}{x^3}\right)$ se găsește că -5 este un minorant pentru aceleași rădăcini.

Procedeul derivat din teorema lui Mac-Laurin sugerează un alt procedeu practic, bazat pe observația că un polinom poate fi scris ca sumă de alte polinoame P_i, care se obțin grupînd convenabil termenii polinomului dat; cel mai mare dintre majoranții rădăcinilor polinoamelor P_i poate să fie un majorant destul de restrîns pentru polinomul dat.

Astfel, pentru a găsi un majorant pentru rădăcinile polinomului $x^5 - x^3 + 1000$, este destul să găsim un majorant pentru polinomul $x^5 - x^3$; spre exemplu, 1 este un majorant.

Exemplu. Să se indice un interval care să cuprindă toate rădăcinile reale ale polinomului

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 1000\,x^2 + x - 1000.$$

Criteriile care derivă din cele două teoreme ne dau $M = 1001$, deci intervalul $(-1001, +1001)$.

Cercetînd direct polinomul $f(x)$, observăm că termenii săi se pot grupa astfel:

$$f(x) = (x^6 - 2\,x^5 - 100\,x^2 - 1000) + x^3 + x =$$

$$= x^6\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{10^2}{x^4} - \frac{10^3}{x^6}\right) + x^3 + x,$$

de unde rezultă că pentru $x > 5$, $f(x) > 0$. De asemenea, considerînd polinomul

$$f(-x) = x^6 + 2x^5 - x^3 - 100\,x^2 - x - 1000,$$

care se poate scrie sub forma

$$(x^6 - 100\,x^2 - 1000) + (2x^5 - x^3 - x) =$$

$$= x^5\left(1 - \frac{10^2}{x^4} - \frac{10^3}{x^6}\right) + x^3\left(2x^2 - 1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

obținem că pentru $x > 5$, $f(-x) > 0$. Altfel spus: pentru $-x < -5$, $f(-x) > 0$ sau pentru $y < -5$, $f(y) > 0$.

Prin urmare, rădăcinile reale ale lui $f(x)$ sînt cuprinse în intervalul $(-5, +5)$.

10.3. Exerciții

1. Să se traseze graficul funcțiilor x, x^3, $x^3 - x$, $x(x-1)^2$ față de același sistem de coordonate.

Indicație. Se va lua unitatea pe axa ordonatelor mai mică decît unitatea pe axa absciselor, pentru ca figura să aibă o formă rezonabilă, ținînd seama, spre exemplu, că un punct de pe graficul lui x^3 de abscisă 2 cm are ordonata de 8 cm.

2. Să se traseze graficul fiecăreia dintre funcțiile

$$x^2 - 1,\ x^2,\ x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x.$$

3. Să se găsească un minorant și un majorant pentru rădăcinile polinomului

$$2x^5 + x^4 + 9x^3 - 7x^2 - 6x - 100.$$

Indicație. Grupîndu-se convenabil termenii, se vede că se pot lua ca margini -1 și $+3$.

4. Să se arate că pentru $x > 1$, are loc inegalitatea

$$2x^3 + 3x^2 - 12\,x + 7 > 0$$

și

$$3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 19 > 0.$$

10.4. Separarea rădăcinilor reale. Fundamentală pentru determinarea rădăcinilor reale ale polinoamelor reale este următoarea

Teoremă (a lui Weierstrass): *O funcție reală f continuă pe un interval $[a, b]$, care are valori de semne contrarii la capetele intervalului, se anulează cel puțin într-un punct din acel interval* [7].

Din această teoremă rezultă imediat următoarele corolari importante.

Corolarul 1. *Dacă a este un număr real pozitiv, polinomul $f(x) = x^n - a$ are o rădăcină reală pozitivă, oricare ar fi numărul natural n.*

Într-adevăr, avem $f_1(0) - a < 0$ și după formula binomului

$$f\left(1 + \frac{a}{n}\right) = 1 + a + \sum_{p=2}^{n} C_n^p \frac{a^p}{n_p} - a > 0.$$

Din identitatea $r^n - s^n = (r - s)(r^{n-1} + r^{n-2}s + \ldots + s^{n-1})$ rezultă apoi că dacă $r > s > 0$, atunci $r^n > s^n$. Aceasta arată că rădăcina reală și pozitivă a binomului $x^n - a$ este unică. Această rădăcină se notează cu semnul $\sqrt[n]{a}$ sau $a^{\frac{1}{n}}$.

Corolarul 2. *Orice polinom real de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.*

Într-adevăr, pentru un astfel de polinom, $f(-M) < 0$ și $f(+M) > 0$ cu M convenabil ales.

Pentru calculul numeric al rădăcinilor reale ale unui polinom $f(X)$ cu coeficienți reali sînt utile următoarele operații preliminare:

1. Separarea rădăcinilor multiple; aceasta se face calculînd întîi derivata lui $f(x)$ și calculînd apoi c.m.m.d.c. al polinoamelor $f(x)$ și $f'(x)$; fie acesta $d(x)$.

Rădăcinile lui $d(x)$, care sînt rădăcinile multiple ale lui $f(x)$, sînt mai ușor de calculat, pentru că $d(x)$ este un polinom de grad mai mic.

2. Cîtul $\frac{f(X)}{d(X)}$ este un polinom care are numai rădicini simple.

Astfel ne putem mărgini la calculul rădăcinilor reale simple ale polinoamelor cu coeficienți reali.

2. Se înțelege prin *separarea rădăcinilor reale ale unui polinom* $f(x)$ *cu coeficienți reali* determinarea unor intervale în corpul real, care să cuprindă numai cîte o rădăcină a polinomului $f(x)$. Această operație se bazează pe proprietatea că rădăcinile derivatei $f'(x)$ separă rădăcinile polinomului $f(x)$ în înțelesul că între două rădăcini ale lui $f(x)$ există cel puțin o rădăcină a derivatei $f'(x)$, [7]. În baza acestei proprietăți se calculează mai întîi rădăcinile derivatei $f'(x)$; fie acelea $x_1', \ldots, x_s'$. Se formează *șirul lui Rolle*

$$f(M'), f(x_1'), \ldots, f(x_s'), f(M''), \tag{10.2}$$

unde M' este un minorant, iar M'' un majorant al rădăcinilor lui $f(X)$, și se observă semnele termenilor șirului:

Dacă doi termeni consecutivi din șir $f(x_i')$, $f(x_{i+1}')$ sînt de semne contrarii, atunci polinomul f are o rădăcină cuprinsă în intervalul

(x_i', x_{i+1}'), conform teoremei lui Weierstrass, și numai una, pentru că dacă ar avea două rădăcini a și v în acest interval, derivata ar trebui să aibă o rădăcină între a și v și atunci x_i' și x_{i+1}' nu ar mai fi rădăcini consecutive ale derivatei.

La fel, dacă $f(M')$ și $f(x_1')$ sînt de semne contrarii, polinomul $f(x)$ are o rădăcină cuprinsă între M' și x_1'. De asemenea, dacă $f(x_s')$ și $f(M'')$ sînt de semne contrarii, $f(x)$ are o rădăcină cuprinsă între x_s' și M''.

Dacă $f(x_i')$ și $f(x_{i+1}')$ sînt de același semn, f nu are rădăcină reală în intervalul (x_i', x_{i+1}'), deoarece derivata în acest interval nu se anulează și $f(x)$ este monotonă; deci nu se poate anula în intervalul $[x_i', x_{i+1}']$.

Exemplu. Să se separe rădăcinile reale ale polinomului $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1$. În acest caz se poate lua $M' = -1$ [după cum se vede considerînd polinomul $f(-x)$] și $M'' = 5$. Rădăcinile lui $f'(x)$ sînt 0 și $\frac{10}{3}$ astfel încît șirul lui Rolle se poate scrie după cum urmează:

$$f(-1) = -5; \quad f(0) = +1; \quad f\left(\frac{10}{3}\right) = -18; \quad f(5) = +1.$$

Calculînd termenii acestui șir, se vede că primul și cel de al treilea sînt negativi iar ceilalți sînt pozitivi, astfel încît polinomul are trei rădăcini reale cuprinse respectiv în intervalele $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{10}{3}\right)$, $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$. Trasînd graficul acestei funcții pe o foaie milimetrică, în care luăm unitatea pe axa absciselor de trei ori mai mare ca pe axa ordonatelor, găsim că rădăcinile polinomului dat se găsesc în intervalele $(-1, 0)$, $(0, 1)$ și $(4, 5)$. Se pot indica intervale și mai mici în care se găsesc aceste rădăcini.

10.5. Aproximarea rădăcinilor

O dată separate rădăcinile reale ale unui polinom cu coeficienți reali, se poate trece la calculul lor numeric cu aproximația de care avem nevoie. O metodă simplă și eficace, în acest scop, este aceea de a înlocui graficul funcției, în intervalul care cuprinde rădăcina căutată printr-o coardă a acestui grafic.

10.5.1. *Metoda coardei.* Să presupunem că a și b sînt capetele intervalului în care se găsește rădăcina α și că $a < b$. În intervalul (a, b), să înlocuim arcul din graficul lui $f(x)$ prin coarda care unește punctele $A\,(a, f(a))$, $B\,(b, f(b))$. Prin ipoteza $f(a) \cdot f(b) < 0$ [aceasta ne spune că în intervalul (a, b) se găsește o rădăcină a polinomului $f(x)$], rezultă că punctele A și B se găsesc de o parte și de alta a axei absciselor (v. fig. 8). Coarda AB taie axa Ox într-un punct x_1 situat în intervalul (a, b); punctul x_1 este o valoare aproximativă

a rădăcinii α. Abscisa x_1 se deduce din $a, b, f(a), f(b)$ prin operații raționale din ecuația coardei

$$\frac{x_1 - a}{f(a)} = \frac{x_1 - b}{f(b)}.$$

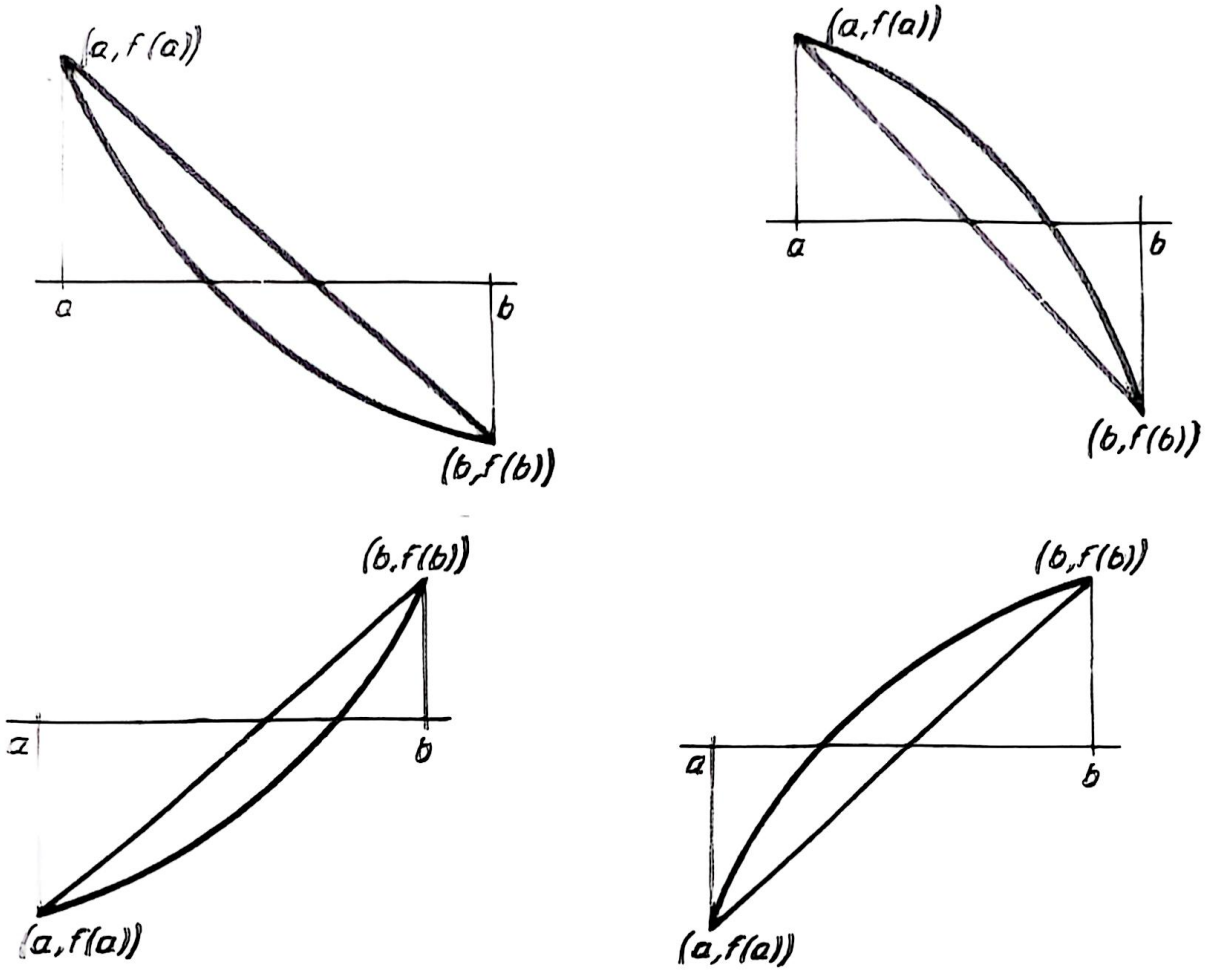


Fig. 8

Rezolvînd în raport cu x_1, obținem

$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Calculăm acum pe $f(x_1)$: dacă $f(x_1)$ este de același semn cu $f(b)$, repetăm calculul înlocuind pe b cu x_1; dacă $f(x_1)$ este de același semn cu $f(a)$, repetăm calculul înlocuind pe a cu x_1. Să presupunem că $f(b) \cdot f(x_1) > 0$; repetînd calculul, obținem

$$x_2 = \frac{af(x_1) - x_1 f(a)}{f(x_1) - f(a)}.$$

Continuînd în acest mod, obținem un șir de valori $x_1, x_2, \ldots$ care converge către α:

$x_{n+1} = \dfrac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}$, cu $x_0 = a$ sau unul dintre x_i precedenți.

Altă metodă folosită des pentru aproximarea rădăcinilor reale ale unui polinom este

10.5.2. *Metoda tangentei (a lui Newton).* Fie a un număr real, apropiat de rădăcina α a polinomului $f(x)$. Diferența $h = \alpha - a$ se poate evalua ușor, dacă ținem seama de teorema creșterilor finite [7] (a lui Lagrange):

$$f(b) = f(a) + (b - a) f'(c).$$

Dacă punem $b = \alpha$ în această relație, avem

$$0 = f(\alpha) = f(a) + hf'(c), \tag{10.3}$$

unde c este un număr real cuprins în intervalul (a, α). Nu cunoaștem exact numărul $f'(c)$, dar putem lua o valoare aproximativă a sa, de exemplu $f'(a)$. Deducem pentru h valoarea aproximativă $-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$, rezolvînd în raport cu h ecuația precedentă, de gradul întîi.

Astfel, vom avea pentru rădăcină valoarea a_1, în general mai apropiată decît a,

$$a_1 = a + h = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{10.4}$$

De fapt, a_1 este rădăcina polinomului de gradul întîi

$$f(a) + f'(a)(x - a),$$

care se deduce din dezvoltarea lui $f(x)$ după puterile lui $x - a$, prin neglijarea termenilor de grad mai mare ca unu în $x - a$.

Din punct de vedere geometric, această operație de aproximare (neglijarea termenilor de grad mai mare ca unu) înseamnă înlocuirea graficului lui $f(x)$, într-un interval (a, b) care cuprinde pe α, cu tangenta în punctul $A(a, f(a))$ la grafic. Într-adevăr

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

este chiar ecuația tangentei în punctul A la curba $y = f(x)$.

Valoarea $-\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ a lui h este cu atît mai apropiată de valoarea

adevărată a lui h, din ecuația (10.3), cu cît $f'(a)$ este mai apropiat de $f'(c)$. Aceste valori sînt cu atît mai apropiate, cu cît tangenta la graficul funcției $f(x)$ în intervalul (a, b), în care se găsește rădăcina α, schimbă de direcție mai puțin. De această stabilitate a tangentei ne putem asigura luînd pe a și b destul de aproape de rădăcina α, ceea ce se poate face, de exemplu, prin înjumătățiri succesive ale intervalului.

Formula (10.4) ne dă astfel o valoare a_1 mai apropiată de rădăcina α decît a. Dacă repetăm operația de aproximare, punînd în formula (10.4) pe a_1 în locul lui a, obținem o aproximație și mai bună a rădăcinii α:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Repetînd procesul de aproximație de mai multe ori, obținem un șir de numere $a, a_1, a_2, \ldots$ legate prin relația de recurență

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \tag{10.5}$$

10.5.3. Șirul $a, a_1, a_2, \ldots$ este convergent către o rădăcină α a polinomului $f(x)$. Aceasta se vede clar din formula creșterilor finite de ordinul al doilea (10.1) relativă la funcția $f(x)$, într-un interval care separă rădăcina α de celelalte rădăcini; mai bine zis de rădăcinile reale consecutive, a_1', a_2' ale derivatei, între care este cuprinsă rădăcina α.

Dacă a_n este unul dintre termenii șirului și $a_n + h$ este rădăcina lui $f(x)$, care împreună cu a_n stă între două rădăcini reale consecutive ale derivatei, avem din (10.1)

$$0 = f(a_n + h) = f(a_n) + hf'(a_n) + \frac{h^2}{2} f''(a_n + \theta h), \quad 0 < \theta < 1,$$

cu $f(a_n) \neq 0$. Din această relație, rezultă

$$h = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(a_n + \theta h)}{f'(a_n)}.$$

Luînd pentru a_{n+1} valoarea dată de metoda tangentei $a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$, comitem o eroare egală în modul cu

$$|\alpha - a_{n+1}| = |a_n + h - a_{n+1}| = \left| a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - \frac{h^2}{2}\frac{f''(a_n+\theta h)}{f(a_n)} - \right.$$

$$\left. - \left[a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \right] \right| = \frac{h^2}{2} \left| \frac{f''(a_n+\theta h)}{f'(a_n)} \right|.$$

Această relaţie ne arată că, dacă $f'(a_n)$ nu este prea mic faţă de $f''(a_n + \theta h)$, adică dacă graficul lui $f(x)$ este în a_n destul de neted, dacă nu trece prin puncte de extrem (de maxim sau minim), cum am presupus, atunci diferenţa dintre a_{n+1} şi rădăcina α în modul este de acelaşi ordin cu pătratul diferenţei între a_n şi α.

Dacă de exemplu, $|a_n - \alpha| < 0{,}01$, atunci $|a_{n+1} - \alpha| \leqslant$ $\leqslant 0{,}0001 \dfrac{f''(a_n+\theta h)}{2f'(a_n)}$. Aceasta înseamnă că şirul $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots$ dat de metoda tangentei, este, în condiţii destul de generale, convergent rapid către o rădăcină a polinomului $f(x)$.

Exemplu. Fie r un număr real pozitiv, s un număr natural şi $f(x) = x^s - r$. Ştim că acest polinom are o singură rădăcină reală pozitivă, care se notează cu simbolul $\sqrt[s]{r}$ (v. 10.3).

Să aproximăm numărul $\sqrt[s]{r}$ cu metoda tangentei. Putem lua pentru a întregul (pozitiv) cel mai mare pentru care are loc dubla inegalitate $a \leqslant \sqrt[s]{r} < a + 1$.

O primă aproximaţie pentru $\sqrt[s]{r}$ este a. Avem $f'(x) = sx^{s-1}$,

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = \frac{a^s - r}{sa^{s-1}}.$$

Metoda tangentei ne conduce la următorul şir:

$$a_1 = a - \frac{a^s - r}{sa^{s-1}} = a + \frac{r - a^s}{sa^{s-1}},$$

. . . . . .

$$a_{m+1} = a_m + \frac{r - a_m^s}{sa_m^{s-1}} \ldots$$

Observăm că această metodă pentru $s = 2$ conduce la aceleaşi calcule ca şi procedeul obişnuit de extragere a rădăcinii pătrate dintr-un număr real.

Exemplu. Astfel, fie $r = 37{,}8152$; $6^2 < r < 7^2$. Prin urmare

$$a_1 = 6 + \frac{r - 36}{12} = 6 + \frac{1{,}8152}{12} = 6{,}1\,;$$

$$a_2 = 6{,}1 + \frac{r - 6{,}1^2}{12{,}2} = 6{,}1 + \frac{0{,}6052}{12{,}2} = 6{,}1 + \frac{6{,}052}{122} \approx 6{,}14 \ldots$$

Amintim, pe acelaşi exemplu, schema de calcul pentru extragerea rădăcinii pătrate:

$\sqrt{37{,}8152}$	6,14
36	
181	121 × 1
121	
6052	1224 × 4
4896	. . . .
1156	
. . .	

Acelaşi lucru se poate spune şi despre extragerea rădăcinii cubice, astfel încît metoda tangentei de calcul numeric a rădăcinii (pozitive) a polinomului $x^s - r$ este o generalizare a procedeelor de extragerea rădăcinii pătrate, respectiv cubice, dintr-un număr real.

Pentru ilustrarea celor două metode, ca un alt exemplu, reproducem din [2] aproximarea uneia dintre rădăcinile polinomului

$$f(x) = x^3 + 5x^2 - 15x - 7\,;$$

anume, a rădăcinii cuprinse între 2 şi 3. Începem cu valoarea $x_0 = 2, 5$.

a) Urmînd metoda lui Newton, folosim formula de iteraţie

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Calculele sînt dispuse în schema:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2,5	2,375	28,75	
1	2,4173931	0,0843686	27,3043304	0,0031035
2	2,4142878	0,0019769	26,6292347	0,0000742
3	2,4142136	0,0000010	26,6274179	0,0000000
4	2,4142136			

h) Urmînd metoda coardei, folosim formula

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{f(x_n) - f(x_0)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Cu această metodă, este necesară încă o aproximare inițială x_1 a rădăcinii; putem lua $x_1 = 2$ sau 2,4.

Calculele se dispun ca în schema următoare:

n	x_n	$f(x_n)$	$x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)$	$f(x_n) - f(x_0)$
1	2,4	−0,376	−6,6400	−2,751
2	2,4136677	−0,0145312	−5,7687888	−2,3895312
3	2,4141927	−0,0005555	−5,7350965	−2,3755555
4	2,4142128	−0,0000205	−5,7338049	−2,3750205
5	2,4142124			

10.6. **Exerciții**

1. Să se calculeze cu aproximație mai mică decît 10^{-5} rădăcina reală a polinomului $x^3 - x - 1$.

R. 1,32475.

2. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina pozitivă a polinomului $x^3 - 5x - 3$, iar rădăcinile negative cu cîte două zecimale exacte.

R. 2,4908; −0,65; −1,85.

3. Să se calculeze cu patru zecimale exacte rădăcina pozitivă a ecuației $x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 35x - 70 = 0$.

4. Să se calculeze $\sqrt[5]{32{,}281656}$ cu cinci zecimale exacte; mai întîi direct și apoi folosind tabelele de logaritmi.

§ 11. Polinoame cu coeficienți rationali

11.1. Pentru cercetarea rădăcinilor acestor polinoame, pot fi utile unele considerații de aritmetică în legătură cu coeficienții lor.

Fie $f(X) = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_n$ un polinom cu coeficienți din corpul Q al numerelor raționale.

Înmulțind cu un întreg convenabil r, obținem polinomul

$$rf(X) = b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_n$$

cu coeficienți întregi.

Fie s c.m.m.d.c. al coeficienților b_0, b_1, ..., b_n. Polinomul

$$g(X) = \frac{r}{s} f(X) = c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n$$

are coeficienți întregi și primi între ei. Polinoamele $f(X)$ și $g(X)$ au aceleași rădăcini; de aceea este destul să ne ocupăm de rădăcinile polinomului $g(X)$.

În acest scop amintim din aritmetică

Teorema 1. *Să presupunem că numărul întreg a divide produsul bc a două numere întregi b, c; dacă a este prim cu c, atunci a este divizor al lui c.*

Într-adevăr, dacă a și b sînt prime între ele, atunci se pot găsi două numere întregi u și v astfel încît să putem scrie $au + bv = 1$. Numerele u și v se găsesc, de exemplu, cu algoritmul lui Euclid aplicat numerelor a și b (v. 8.3.2).

Înmulțind cu c într-o parte și în cealaltă a semnului de egalitate, deducem

$$acu + bcv = c.$$

Deoarece a divide, prin ipoteză, produsul bc, a divide evident, suma din partea stîngă a semnului de egalitate; prin urmare, a divide pe c. Teorema este demonstrată.

Corolar. *Dacă a divide produsul $b^n c$ și este prim cu b, atunci a este divizor al lui c.*

Aceasta rezultă din teorema precedentă raționînd prin recurență asupra lui n: numărul a divide produsul $b(b^{n-1} c)$ și este prim cu b, deci divide produsul $b^{n-1} c = b(b^{n-2} c)$; prin urmare, divide pe $b^{n-2} c = b(b^{n-3} c)$, ...; a divide pe c.

Cu această pregătire, putem demonstra în privința rădăcinilor raționale ale unui polinom cu coeficienți întregi.

Teorema 2. *Să presupunem că polinomul cu coeficienți întregi $g(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1} x + c_n$ are o rădăcină rațională a/b (a și b întregi primi între ei); în acest caz a divide termenul liber c_n, iar b divide coeficientul dominant c_0.*

Să presupunem că a/b este o rădăcină a polinomului $g(x)$, cu a și b întregi primi între ei. În acest caz, avem egalitatea

$$c_0 \frac{a^n}{b^n} + c_1 \frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \ldots + c_n = 0,$$

din care deducem, prin înmulțire cu b^n,

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_n b^n = 0. \tag{11.1}$$

Aceasta este o relație în numere întregi; ea se poate scrie sub forma

$$c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_{n-1} a b^{n-1} = -c_n b^n. \tag{11.2}$$

Observăm că a divide toți termenii din partea stîngă a relației (11.2); prin urmare, a divide produsul $c_n b^n$. Deoarece a este prim cu b, rezultă, conform teoremei 1, că *a divide termenul liber c_n al polinomului $f(x)$.*

În același mod, în relația (11.1) putem izola primul termen

$$-c_0 a^n = c_1 a^{n-1} b + \ldots + c_n b^n. \tag{11.3}$$

Observăm că b divide toți termenii din partea dreaptă a relației (11.3); prin urmare, b divide și suma lor, adică produsul $c_0 a^n$. Din faptul că b este prim cu a, rezultă că *c_0 este divizibil cu b.*

În particular avem următorul

Corolar. *Să presupunem că polinomul $g(X)$ cu coeficienți întregi are coeficientul dominant c_0 egal cu 1; dacă acest polinom are o rădăcină rațională, acea rădăcină este un număr întreg.*

Dacă fracția ireductibilă a/b este o rădăcină a lui $g(x)$, b trebuie să fie un divizor al lui $c_0 = 1$, adică să fie egal cu $+1$.

Aceste observații înlesnesc în mod considerabil căutarea rădăcinilor raționale ale unui polinom cu coeficienți raționali $f(X)$; se înlocuiește polinomul $f(X)$ cu polinomul $g(X)$ cu coeficienții întregi, primi între ei, care diferă de $f(X)$ printr-un factor numeric r/s. Se caută un minorant M' și un majorant M'' pentru rădăcinile lui $g(X)$ cît mai apropiate între ele și apoi se consideră toate fracțiile ireductibile a/b din intervalul (M', M''), al căror numărător divide termenul liber c_n și al căror numitor divide coeficientul dominant c_0 al polinomului $g(X)$; se încearcă fiecare dintre aceste fracții cu regula lui Horner, de exemplu, și se reține rădăcinile lui $g(X)$.

Exemplu. Fie polinomul $f(X) = X^4 - 2X^3 - 8X^2 + 13X - 24$; se întreabă dacă acest polinom are rădăcini raționale.

Dacă $f(X)$ are rădăcini raționale, acestea trebuie să fie întregi, întrucît coeficienții sînt întregi și coeficientul lui X^4 este $+1$.

Dacă $f(X)$ are rădăcini întregi, acelea sînt printre divizorii termenului liber 24; adică printre numerele -24, -12, -6, ..., $+24$. Grupînd convenabil termenii, se constată că -4 este un minorant și $+4$ este un majorant pentru rădăcinile reale ale lui $f(X)$. Astfel răcdăcinile întregi ale lui $f(X)$ sînt de căutat printre numerele

$$-3, \ -2, \ -1, \ +1, \ +2, \ +3.$$

Acum putem proceda în două moduri : fie să căutăm mai întîi a seapara rădăcinile cu ajutorul şirului lui Rolle şi a căuta o primă aproximaţie a lor cu metoda coardei sau a tangentei, fie să le încercăm pe rînd, calculînd pe $f(-3)$, $f(-2)$, ..., $f(+3)$. Astfel

$$f(-3) = (-3)^4 - 2(-3)^3 - 8(-3)^2 + 13(-3) - 24 = 0;$$

-3 este o rădăcină a polinomului $f(x)$. Împărţind cu $x+3$, rămîne de căutat rădăcinile raţionale, adică întregi, ale polinomului

$$h(x) = \frac{f(x)}{x+3} = x^3 - 5x^2 + 7x - 8.$$

Acestea sînt de căutat printre numerele -2, -1, $+1$, $+2$, căci trebuie să fie divizori ai lui 8.

Se vede că $h(-2)<0$, $h(-1)<0$; se calculează $h(1)$ şi $h(2)$ şi se constată că şi acestea sînt diferite de zero; astfel -3 este singura rădăcină raţională a polinomului $f(x)$.

Calculul rădăcinilor raţionale se poate reduce la calculul rădăcinilor întregi în baza următoarei observaţii : polinomul

$$g(X) = c_0 X^n + c_1 X^{n-1} + \ldots + c_n$$

şi polinomul

$$c_0^{n-1} g(X) = c_0^n X^n + c_1 c_0 c_0^{n-1} X^{n-1} + \ldots + c_n c_0^n$$

au aceleaşi rădăcini. Dar punînd $c_0 X = Y$, putem scrie

$$c_0^n g(X) = Y^n + c_1 c_0 Y^{n-1} + \ldots + c_n c_0^{n-1} = h(Y).$$

Astfel avem $c_0^{n-1} g(X) = h(c_0 X) = h(Y)$. În loc să calculăm rădăcinile lui $g(X)$, putem calcula rădăcinile lui $h(Y)$. Acestea împărţite cu c_0 ne dau rădăcinile lui $g(X)$, adică ale lui $f(X)$. Dar rădăcinile raţionale ale lui $h(Y)$ sînt întregi, conform corolarului de mai sus.

11.2. Teorema 2 ne dă posibilitatea să punem în evidenţă rădăcinile raţionale ale unui polinom cu coeficienţi întregi sau raţionali. Implicit, această teoremă ne arată dacă un astfel de polinom are sau nu are rădăcini raţionale, oferindu-ne un criteriu simplu şi puternic, cu ajutorul căruia să putem decide dacă sînt sau nu iraţionale anumite numere algebrice.

Exemple. 1. Numărul $\sqrt{7}$ nu este raţional. Într-adevăr, $\sqrt{7}$ este rădăcină a polinomului x^2-7, care în baza corolarului teoremei 2, nu poate avea rădăcini raţionale, care să nu fie întregi, iar rădăcinile întregi raţionale trebuie să aparţină mulţimii divizorilor lui 7, $\{-7, -1, +1, +7\}$. Or, înlocuind pe x cu fiecare dintre aceste patru numere, constatăm că nici unul dintre ele nu este rădăcină; polinomul x^2-7 nu are rădăcini raţionale, deci $\sqrt{7}$ nu este număr raţional.

2. Numărul $\sqrt[3]{5}$ nu este rațional. Aceasta se demonstrează în același mod; $\sqrt[3]{5}$ este o rădăcină a polinomului x^3-5, care nu poate avea rădăcini raționale necuprinse în mulțimea divizorilor lui 5, $\{-5, -1, +1, +5\}$. Deoarece nici unul dintre acești divizori nu este rădăcină a lui x^3-5, $\sqrt[3]{5}$, rezultă număr irațional.

3. Să considerăm numărul $z = \sqrt{2} - \sqrt{5}$; este acest număr rațional?

Putem scrie $z + \sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$; înmulțind cu $z + \sqrt{5} + \sqrt{2}$, deducem $(z + \sqrt{5})^2 - 2 = 0$; $z^2 + 3 + 2z\sqrt{5} = 0$. Înmulțind cu $z^2 + 3 - 2z\sqrt{5}$, obținem $(z^2 + 3)^2 - 20\,z^2 = 0$. Astfel z este o rădăcină a polinomului $g(X) = X^4 - 14\,X^2 + 9$. Rădăcinile raționale ale acestui polinom, dacă există, sînt cuprinse în mulțimea divizorilor lui 9, $\{-9, -3, -1, +1, +3, +9\}$. Nici unul dintre acești divizori nu anulează polinomul $g(X)$; astfel $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ rezultă număr irațional.

4. În același mod se poate arăta că numărul $u = \sqrt[3]{5} - \sqrt{3}$ este irațional.

Putem scrie $u + \sqrt{3} = \sqrt[3]{5}$, de unde, prin ridicare la cub: $u^3+9u^2 + (3u^2+3)\sqrt{3} = 5$; $u^3 + 9u^2 - 5 = -3\,(u^2 + 1)\sqrt{3}$. Ridicînd la pătrat, deducem

$$(u^3 + 9u^2 - 5)^2 = 27\,(u^2 + 1)^2,$$

adică

$$u^6 + 18u^5 - 54u^4 - 10u^3 - 141u^2 - 2 = 0.$$

Această ecuație nu are rădăcini raționale în afara mulțimii $\{-2, -1, 1, 2\}$, formată de divizorii termenului liber. Deoarece acești divizori nu sînt nici ei rădăcini, rezultă că u este irațional.(Să se calculeze u cu aproximație $< 10^{-2}$).

5. Să se arate că numărul $z = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ este rațional.

Avem, punînd $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} = u$, $\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = v$, $z^3 - u^3 - v^3 = 3uv\,(u + v)$; prin urmare

$$z^3 - 40 = 3\sqrt[3]{8}\,z,$$

adică

$$z^3 - 6z - 40 = 0.$$

Considerînd șirul lui Rolle pentru polinomul $f(x) = x^3 - 6x - 40$, constatăm că acesta are o singură rădăcină reală, mai mare ca 2. Dacă singura rădăcină reală a lui $f(x)$ este rațională, aceasta trebuie să fie întreagă, mai mare sau egală cu 2 și să dividă numărul 40.

Căutînd un majorant pentru rădăcini, găsim că $+4$ este rădăcina polinomului $f(X)$, astfel $z = 4$.

Așadar, numărul $z = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ este rațional.

11.3. Exerciții

1. Să se descompună în factori ireductibili în inelul $Q[X]$ polinoamele

$$f = x^3 - 4x^2 - 2x - 15,$$

$$g = x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4,$$

$$h = 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 9x + 6,$$

$$p_n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x+1)}{2!} + \ldots + \frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}.$$

Indicație. Pentru f, g, h se caută rădăcinile raționale și se face împărțirea la factorii corespunzători; pentru p_n se procedează prin inducție completă asupra lui n:

$$p_1 = (x+1), \quad p_2 = \frac{(x+1)(x+2)}{2!} \ldots$$

2. Să se arate că, dacă în enunțul teoremei 2 se omite condiția ca fracția a/b să fie ireductibilă, teorema nu mai este adevărată. Să se dea un exemplu.

3. Să se arate că orice polinom $f \in Q[X]$ cu coeficienți raționali, care admite pe $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ca rădăcină, admite și pe $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ ca rădăcini (de aceea toate aceste numere algebrice se zic *conjugate* peste Q).

4. Care dintre numerele $\sqrt{10}$, $\sqrt{15}$, $i + \sqrt{2}$, $\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$ este rațional?

Indicație. Se scrie pentru ficcare număr un polinom care-l admite ca rădăcină și se examinează rădăcinile raționale ale polinomului respectiv; se găsește că numai $\sqrt[3]{54 + 30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54 - 30\sqrt{3}}$ este rațional.

5. $\sqrt[3]{2}$ nu este rațional. Să se arate că nu există polinom de gradul al doilea cu coeficienți raționali care să admită ca rădăcină pe $\sqrt[3]{2}$ (v.6.7).

Se poate raționa și astfel: dacă ar exista un polinom f de gradul al doilea cu coeficienți raționali care să aibă pe $\sqrt[3]{2}$ ca rădăcină, atunci f și polinomul $g = X^3 - 2$ ar avea o rădăcină în comun și, prin urmare, un factor comun în $Q[X]$, în contradicție cu faptul că $X^3 - 2$ este ireductibil în $Q[X]$.

R. $X^3 - 2$ este ireductibil în $Q[X]$, pentru că nu are rădăcini raționale.

6. Care dintre numerele cos 180°, cos 60°, cos 30°, cos 20°, sin 20° este rațional?

R. $\cos 180° = -1$, $\cos 60° = \frac{1}{2}$ sînt raționale; $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ este irațional. Din relația $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$, rezultă că cos 20° este rădăcină a polinomului $4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$, care nu are nici o rădăcină rațională (să se arate aceasta). La fel se poate arăta și pentru sin 20° că este algebric irațional.

BIBLIOGRAFIE

1. Artin, E. *Galoische Theorie.* Leipzig, Teubner, 1958.
2. Berezin, I. S., Jidkov, N. P. *Metodi vicislenii.* Moscova, Gostehizdat, 1962.
3. Bourbaki, N. *Éléments de mathématique.* Paris, Hermann, 1958.
4. Kuroș, A. G. *Lekții po obșcei alghebre.* Moscova, Gostehizdat, 1962.
5. Kuroș, A. G. *Kurs vișșei alghebri.* Moscova, Gostehizdat, 1965.
6. Dedekind, R. *Gesammelte mathematische Werke,* 3 vol. Braunschweig, Vieweg, 1932.
7. Dinculeanu, N. *Elemente de analiză matematică.* Manual pentru clasa a XI-a reală. București, Editura didactică și pedagogică, 1962.
8. Donciu, N., Flondor, D., Simionescu, Gh. *Algebra și analiza matematică. Culegere de probleme.* București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
9. * * * *Ențiklopedia elementarnoi matematiki,* Alghebra, Gheometria. Moscova, Nauka, 1951.
10. Froda, A. *Algebră superioară,* vol. I. București, Editura Academiei, 1958.
11. Galbură, Gh. *Corpuri de funcții algebrice.* București, Editura Academiei, 1962.
12. Gelfond, I. M. *Lecții de algebră liniară.* București, Editura tehnică, 1955.
13. Godement, R. *Cours d'Algèbre.* Paris. Hermann, 1963.
14. Hardy, G. H. *A cours of pure mathematics.* Cambridge, University Press, 1925.
15. Heldy, G. *Linear algebra.* Londra, Addison-Wesley, Publ. Comp. Massachusetts, 1961.
16. Ioachimescu, A. G. *Culegere de probleme de algebră.* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
17. Lalescu, Tr. *Calcul algebric.* București, Cultura națională, 1924.
18. Lang, S. *Algebra.* Addison-Wesley, Publishing Comp., Massachusetts, 1965.
19. Lascu, Al. *Exerciții de algebră,* București, Editura tehnică, 1967.
20. Malțev, A. I. *Osnovi lineinoi alghebri.* Moscova, Gostehizdat, 1948.
21. Moisil, Gr. *Algebră* (litografiat). București, 1956.
22. Nicolescu, M., Dinculeanu, N., Marcus, S. *Manual de analiză matematică,* vol. I. București, Editura didactică și pedagogică, 1963.
23. Niven, I. *Numbers, rational and irrational.* New York, Random-Hause, 1961.
24. Novosiolov, S. I. *Spețialnii kurs elementarnoi alghebri.* Moscova, Sovetskaia Nauka, 1963.
25. Onicescu, O., Galbură, Gh. *Carte de algebră.* București, Natură, 1948.
26. Pic, Gh. *Curs de algebră.* București, Editura didactică și pedagogică, 1966.
27. Proskureakov, I. V. *Sbornik zadaci po lineinoi alghebre.* Moscova, Gostehizdat, 1962.
28. Rudin, V. *Principles of Mathematical analisis.* New York, McGraw-Hill, 1964.
29. Severi, Fr. *Lezioni di analisi,* vol. I. Bologna, Zanichelli, 1941.
30. Sudan, G. *Geometrizarea fracțiilor continue.* București, Editura tehnică, 1959.
31. Van der Waerden. *Algebra.* Berlin, Springer Verlag, 1937.

TABLA DE MATERII

Introducere 5

I. *Elemente de algebră liniară*

§ 1. Sisteme de două ecuații de gradul întîi cu două necunoscute 9
§ 2. Sisteme de m ecuații de gradul întîi cu n necunoscute (forma generală) 13
§ 3. Matrice 16
§ 4. Sisteme de două ecuații omogene de gradul întîi cu trei necunoscute . . . 28
§ 5. Sisteme de trei ecuații de gradul întîi cu trei necunoscute 31
§ 6. Determinanți de ordinul al doilea. Proprietăți 36
§ 7. Determinanți de ordinul al treilea 42
§ 8. Permutări 58
§ 9. Determinanți de ordinul n 70
§ 10. Rezolvarea sistemelor de ecuații de gradul întîi cu ajutorul determinanților 92
§ 11. Sisteme (oarecare) de ecuații liniare 102
§ 12. Metode de calcul numeric al soluțiilor unui sistem de ecuații liniare 110

II. *Elemente de structuri algebrice. Polinoame*

§ 1. Mulțimi 117
§ 2. Legi de compunere 126
§ 3. Semigrupuri 130
§ 4. Grupuri 132
§ 5. Inele. Corpuri 149
§ 6. Spații vectoriale 185
§ 7. Polinoame 199
§ 8. Relația de divizibilitate în $K[X]$ 212
§ 9. Funcții definite cu ajutorul polinoamelor 231
§ 10. Funcții polinomiale reale 261
§ 11. Polinoame cu coeficienți raționali 276

Bibliografie 282

Redactor: VALENTINA BUCUR
Tehnoredactor: ELENA GERU
Coperta: VALENTIN VIŞAN

Dat la cules 18.01.1969 Bun de tipar 05.06.1969 Apărut 1969. Tiraj 8500+140. Broşate Hîrtie de scris tip I A de 63 g/m² 610×860/16 Coli editoriale 16,61 Coli de tipar 17,75 A 25759/1968 C.Z. pentru bibliotecile mari 512;514. C.Z. pentru bibliotecile mici 512.

Tiparul executat la Intreprinderea Poligrafică „Informaţia" Bucureşti Str. Brezoianu nr. 23—25 Comanda nr. 24

Editura tehnică

Lei 11,50